SU I POLIGONI
ISCRITTI E CIRCOSCRITTI
ALLE CURVE CONICHE

CON DATE CONDIZIONI

RICERCHE

DI

NICOLA TRUDI.

Et c'est toujours contribuer à l'avancement des mathématiques, que de montrer comment on peut resoudre les mêmes questions, et parvenir aux mêmes resultats par des voies tres differentes; les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel, et en acquirent souvent un plus grand dégré d'évidence et de généralité. — *La Grange* — *Probl. du mouvement de rotation d'un corps etc.*

NAPOLI
Nella stamperia per le opere del prof. Flauti
1841.

PREFAZIONE

La storia del problema del Cramer, e della celebrità di esso, per essersi lungo tempo mostrato restio agli sforzi di sommi geometri, ed a tutt' i metodi, è pur troppo nota; ed è stata ancor non ha guari ripetuta dal nostro prof. Flauti nella parte I. delle *Considerazioni sul programma* da lui proposto nell' aprile del 1839, presentate alla R. A. delle Scienze di Napoli. Noti ancor sono a' coltivatori della Geometria, e dell' Analisi moderna i tentativi fatti da valentissimi uomini, fino a' nostri giorni, per la soluzione di quel problema esteso al poligono da iscriversi nel cerchio, o pel solo triangolo da iscriversi in una sezione conica. All' occasione dunque di occuparmi del primo quesito di quel programma, trovandomi impegnato in una ricerca riputata difficilissima dall' Eulero, e da' più illustri matematici del suo tempo, dopo aver a questa adempiuto in modo da aver potuto meritare la soddisfazione de' nostri principali geometri, mi vidi, senza pensarvi, spinto alla ricerca più difficile

di sopra accennata, a trattar la quale, rincoravami lo stesso prof. Flauti. Postomi allora sul cammino, dopo aver esaminato quello, che da' più distinti analisti moderni erasi tentato, o fatto sul problema dell' iscrizione di un triangolo in una curva conica colla richiesta condizione, volli ancor io sperimentarvi le mie forze, adoperando or l' un ripiego, or l' altro, che la Geometria, o l' Analisi moderna potevano somministrarmi. Nè debbo tacere, che più volte arrestommi la difficoltà dell'impresa, dando per tal modo il giusto valore all' opera di coloro, che in siffatto argomento mi avevano preceduto: ed in vero a giudicar rettamente del grado di difficoltà di un lavoro altrui in matematiche, bisogna ben esservisi provato. Ma pure non ristandomi dall' impegno, nè scoraggiandomi per l' arduità di esso, vidi finalmente coronati i miei sforzi dall' aver ottenuta di quel problema più di una soluzione, E siccome le difficoltà superate sono pel nostro animo eccitamento a nuovi più difficili tentativi, impresi a trattare il problema generalissimo *della iscrizione del poligono in una curva conica, co' lati tendenti ad altrettanti punti dati*.

Or se del primo problema trovava già segnate altre tracce, sanno abbastanza coloro che coltivano la storia delle Matematiche, alcuna non esservene ancor per

questo ; che anzi , sebbene il Gergonne se ne fosse compromesso, nel chiudere il suo lavoro del problema del triangolo da iscriversi in una curva conica (*Ann. vol.* VII. *an.* 1816) , così esprimendosi : » dans un » prochain article nous essayerons d'étendre nos procé- » dés au problème général , ou il s' agit soit d' inscrire » à une ligne du second ordre un poligone de *m* cotés » dont les cotés passent par un même nombre de points » donnés, soit *ec. ec.* « , pur tuttavia tal sua promessa mai più si vide adempiuta ne' volumi posteriori , che durarono fino al 1831 .

Ma seguentemente nel vol. VIII. degli *Annali* citati , il chiarissimo geometra francese M. Poncelet dirigea ad esso Gergonne , per convincerlo di aver troppo arditamente pronunziato della prevalenza del metodo a coordinate sulla Geometria (*) , la costruzione di quel problema generale , tacendogliene però l' analisi che ve lo aveva condotto , e dichiarandogli poggiar questa su principj nuovi , ed assolutamente di sua escogitazione , quasichè provocar lo volesse a provarsi dal suo canto alla risoluzione di un tal proble-

(*) Un sunto di questa polemica può leggersi nella lettera da me diretta al Professor Flauti , premessa alla soluzione del *problema fondamentale per la teorica delle polari coniche reciproche* , pubblicata non ha guari,

ma coi metodi conosciuti, non esitò ad annunciargliela *difficile, se non impossibile, sia col metodo delle coordinate, sia colla geometria degli antichi.* Dopo di che soggiugneva » Toutes les constructions précé» demment indiquées sont principalement déduites » de deux théorémes généraux, dont nous nous bor» nerons pour le présent a faire connaitre l'énoncé «.

I due teoremi son questi:

I. *Un poligono variabile sia iscritto in una sezione conica, con tal legge, che tutt' i suoi lati, all'infuori di un solo, passino per punti fissi; il lato libero sarà nel suo movimento continuamente tangente ad un' altra sezione conica, che tocca in due punti la proposta.*

II. *Un poligono variabile sia circoscritto ad una sezione conica con tal legge, che tutt' i suoi vertici all' infuori di un solo, percorrano rette date di sito; il vertice libero descriverà nel suo movimento un' altra sezione conica, tangente la prima in due punti.*

Ma questi teoremi eran per essi senza dimostrazione, e la loro verità di convenienza era tutta riposta nel merito del distinto geometra, che aveali rinvenuti per quelle vie sue proprie alle quali i metodi conosciuti, a dir meno, difficilmente poteano giugnere.

Pertanto siffatti due teoremi si vedran rilevati nel-

la presente memoria in varie guise, or con l' un metodo, or con l' altro; e si vedrà inoltre, che la circostanza de' *due contatti* tra la *risultante locale* e la *curva proposta*; non sia essenzialmente necessaria, potendo o non aver affatto luogo, o avvenir anche in un punto solo, secondo la disposizione de' dati.

Ma ritornando alla soluzione del problema generale dell' iscrizione del poligono in una curva conica, del quale tanto diffidava il Poncelet potersene ottener lo snodamento con la Geometria antica, o co' metodi moderni, dovrà sicuramente riescir grato a' geometri, ed a lui soprattutto, che tien luogo tra' più distinti, il vedere come per le pure vie geometriche, o analitiche, o per entrambe riunite, mi sia venuto fatto ottenere di quel problema diverse soluzioni semplicissime, ed indipendenti dagli accennati teoremi. Queste soluzioni porran fine all'attuale mio lavoro, in una seguente Memoria, destinata interamente a tal problema, e con la quale chiuderò tutte le mie ricerche geometriche cui ha dato luogo il primo quesito del programma proposto dal prof. Flauti.

E perchè veggasi con quanto danno della scienza i libri dei nostri antichi maestri si giacciano dimenticati, e senza quella considerazione, e studio che meritano da chi coltiva la Geometria, basterà osservare.

esser da quei libri attinto un principio, che serve di guida alle presenti ricerche, fondate sopra un lemma di Pappo, il quale benchè rilevato da questo antico geometra pel cerchio solo, si applica non per tanto identicamente alle altre curve coniche: alla qual cosa è pur singolare, come niuno di que' tanti che han tentato di estendere il problema del Cramer a tali curve avesse posto ancor mente.

Oso dopo ciò lusingarmi, che questo compimento da me dato a lavoro segnato dal Poncelet prima di ogni altro, ed al quale, per quanto io sappia, par che niente di più siasi aggiunto finora, possa meritar benigna accoglienza da' moderni geometri, al cui giudizio il sottopongo.

IL LEMMA XXII. DI PAPPO

AL LIBRO I. DELLE TAZIONI

ESTESO ALLE CURVE CONICHE.

§. 1. Dalla proposizione cxvii delle *Collezioni matematiche di Pappo*, ch' è il problema xi. del lib. VII., o il lemma xxii del lib. I. delle *tazioni* si rileva la seguente conosciuta verità geometrica:

» Se da due punti dati s' inflettano a qualunque punto del » perimetro di un cerchio due secanti, e da una delle altre in» tersezioni si conduca la corda parallela alla loro congiungente, » la retta che unisce la sua estremità coll'altra intersezione, s'in» contra sempre in un medesimo punto con quella congiungente «. Or è notissimo quanta influenza questo lemma abbia avuta nella soluzione del famoso problema di Cramer, generalizzato benanche a qualsivoglia numero di punti; e reca però meraviglia come a coloro, i quali si son rivolti ad estendere un tal problema alle curve coniche, non siesi presentata l' idea tutta semplice, e naturale di vedere, se la verità contenuta nel presente lemma reggesse benanche per tali curve. Comunque ci sia, niun motto trovasi fatto finora da alcuno di questa importante proprietà de' Conici, e pare ch' essa non siesi da altri avvertita; che certamente si sarebbero del pari avvertite immediate riduzioni a più trattabili, e facili problemi, sì per quello accennato, che per altri affini. Noi dunque ci proponiamo per

primo oggetto di mostrare in questo lavoro che siffatta proprietà competa ad ogni altra curva di 1.° ordine, siccome al cerchio, e mostreremo con qualche esempio quanto utilmente essa possa applicarsi a talune difficili geometriche ricerche.

Dee intanto osservarsi, che l'enunciazione del lemma pel caso del cerchio può convertirsi in quest' altra » Se due lati di » un quadrilatero variabile iscritto in un cerchio circolino intor» no a due punti fissi, ed un altro lato sia parallelo alla loro » congiungente, il quarto lato passerà sempre per un istesso » punto messo per dritto co' primi due «.

E prendendo norma da questa conversione, tratteremo la ricerca, proponendoci il seguente

Problema I.

§. 2. *Iscrivere in una data curva conica un quadrilatero, di cui tre lati passino per tre punti B, B′, B″ dati sopra una retta, e 'l quarto sia parallelo alla retta medesima.*

fig. 1. Soluz. Sia VV′V″V‴ il quadrilatero cercato; VV′, V′V″, V″ V‴ i lati sopra i quali trovar si debbono respettivamente i tre punti dati B, B′, B″, e VV‴ il lato parallelo a BB′. Ciò posto si prendano per assi la tangente OY parallela a BB′, e 'l diametro OX, che passa pel contatto O; potrà così darsi all' equazione della curva la forma generale

$$y^2 = mx^2 + 2nx \quad (*) \qquad (A)$$

(*) Nelle diverse ricerche, che seguono sulle curve coniche, ne assu-

e dinotando con b, b', b'' le ordinate de' tre punti dati, e con a la loro ascissa comune, si esprimano per (z, v), (z', v'), (z'', v'') (*), i tre vertici del quadrilatero, V, V', V''; il quarto V''', ch'è sul lato parallelo a BB', sarà necessariamente espresso da $(z, -v)$: le equazioni de' lati, che passano per B, B', B'' saranno in conseguenza

$$y - b = \frac{b - v'}{a - z'}(x - a)$$

$$y - b' = \frac{b' - v'}{a - z'}(x - a)$$

$$y - b'' = \frac{b'' - v''}{a - z''}(x - a)$$

Passando dunque la prima di queste rette pel punto (z, v), la seconda per (z'', v''), e la terza per $(z, -v)$, si rileveranno le equazioni

$$\left.\begin{aligned} v - b &= \frac{b - v'}{a - z'}(z - a) \\ v'' - b' &= \frac{b' - v'}{a - z'}(z'' - a) \\ -v - b'' &= \frac{b'' - v''}{a - z''}(z - a) \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

---

useremo sempre l'equazione sotto la forma (A), onde abbiano tutta la possibile generalità.

(*) Invece di dire il punto, che ha per coordinate z, v, ci serviamo per brevità della notazione (z, v) comprendendo tra due parentesi prima il simbolo, che rappresenta l'ascissa, e poi quello dell'ordinata, divisi da una virgola.

Inoltre esistendo sulla curva i tre punti (z, v), (z', v'), (z'', v''), si avranno per essi tre equazioni pariformi ad (A), cioè

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= mz^2 + 2nz \\ v'^2 &= mz'^2 + 2nz' \\ v''^2 &= mz''^2 + 2nz'' \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Le sei equazioni (B), (C) esprimono tutte le condizioni del problema; ed or fa d'uopo rilevar da esse un'equazione ad una sola incognita, o tutt' al più a due incognite coordinate, sicchè costruendo il luogo geometrico, che ne risulta, possa ottenersi dalle sue intersezioni colla curva proposta uno de' vertici ignoti del quadrilatero. Ci proporremo dunque ad eliminare le z, v, z'', v'', ricorrendo all' uopo a quegli artifizj, che sogliono comunemente adoperarsi per facilitare i calcoli, e renderli più spediti.

Incominciando dall' eliminar la v tra la prima delle (B), e la prima dello (C), avremo la seguente equazione di 2. grado in z

$$z^2 - \frac{2(b-v')(bz'-av') + 2n(a-z')^2}{(b-v')^2 - m(a-z')^2}\, z = \frac{bz'-av'}{(b-v')^2 - m(a-z')^2}$$

Essendo le radici di questa equazione rappresentate da z, e z', si avrà per le note teorie algebriche

$$z + z' = \frac{2(b-v')(bz'-av') + 2n(a-z')^2}{(b-v')^2 - m(a-z')^2}$$

d' onde, dopo i convenienti sviluppi, e dopo le riduzioni nascenti dalla seconda delle (C), si rileverà

$$z = \frac{z'(b^2 + ma^2) - 2abv' + 2na^2}{2z'(ma+n) - 2bv' + (b^2 - ma^2)}$$

e dalla prima delle (B) si otterrà quindi

$$v = 2b\,\frac{\Big(z'(ma+n) + na\Big) - v'\Big(b^2 + a(ma+n)\Big)}{2z'(ma+n) - 2bv' + (b^2 - ma^2)}$$

Combinando nel modo stesso tra loro la seconda delle (B) con la terza delle (C), si troverà (*)

$$z'' = \frac{z'(b'^2 + ma^2) - 2ab'v' + 2na^2}{2z'(ma+n) - 2b'v' + (b'^2 - ma^2)}$$

$$v'' = \frac{2b'\Big(z'(ma+n) + na\Big) - v'\Big(b'^2 + a(ma+n)\Big)}{2z'(ma+n) - 2b'v' + (b'^2 - ma^2)}$$

(D)

Ed in tal guisa veggonsi espresse le coordinate de' vertici V, V'' in funzioni di quelle del vertice V'.

Or l' ultima delle equazioni (B) dà

$$b''(z'' - z) - v''(a - z) - v(a - z'') = o$$

dalla quale espressione, sostituendo a z, v, z'', v'' i valori per esse qui sopra assegnati, dovrà risultarne un' equazione nelle sole coordinate z', v'. Effettuendo la sostituzione, il risultato dopo le necessarie riduzioni, e trasformazioni potrà mettersi sotto la seguente forma

(*) Per la simmetria di tali equazioni alle precedentemente maneggiate, il risultamento ottiensi senza ripetere il calcolo, colla semplice applicazione degli apici convenevolmente fatta.

$$\Big(b''(b-b') - (bb' - a(ma+n))\Big)(a-z')\Big((b+b')(maz'+nz'+na) - v'(ma^2+2na+bb')\Big)^{(*)}$$

Siffatto risultamento offre ne'suoi fattori due relazioni, cioè

$$b''(b-b') - \Big(bb' - a(ma+2n)\Big) = o \qquad \text{(E)}$$

$$(a-z')\Big((b+b')\ (maz'+nz'+na) - v'(bb'+ma^2+2na)\Big) = o \qquad \text{(F)}$$

(*) Essendo ben complicato, ed imbarazzante il calcolo, che si richiede per rilevare questa espressione, è necessario additare almeno i principali passaggi, onde pervenirvi dalla equazione precedente, nella quale per chiarezza chiameremo I., II., III. i suoi termini $b''(z''-z)$, $-v''(a-z)$, $-v(a-z'')$ rispettivamente.

Colla sostituzione de' valori trovati più sopra per z'', e z si ha nel termine I.

$$z''-z = \frac{z'(b'^2+ma^2) - 2ab'v' + 2na^2}{2z'(ma+n) - 2b'v') + (b'^2 - ma^2)} - \frac{z'(b^2+ma^2) - 2abv' + 2na^2}{2z'(ma+n) - 2bv' + (b^2 - ma^2)}$$

riducendo allo stesso denominatore, contraendo, riunendo tra loro i termini, che risulteranno moltiplicati da $(b^2 - b'^2)$, *e quelli da* $(b-b')$, *ed indicando per brevità con* D, D'' *i denominatori di* z, z'' *questa espressione diverrà*

$$\frac{z(b^2-b'^2)\left\{\begin{array}{l} -\ z'^2(ma+n) \\ +\ z'ma^2 \\ +\ na^2 \end{array}\right\} + z(b-b')\left\{\begin{array}{l} +\ 2av'z'(ma+n) \\ +\ bb'v'z' \\ -\ ma^2v'z' \\ -\ 2na^2v' \\ -\ abb'v' \\ -\ ma^3v' \end{array}\right.}{D.D''} =$$

relazioni, che partitamente esamineremo, onde vedere in qual modo rispondano alla quistione.

§. 3. La (E) essendo sgombra da variabili, e contenendo tutte le grandezze costanti, messe a calcolo nel problema, mostra che questo sia più che determinato; vale a dire, che la situazione di uno de' dati punti dipende da quella degli altri due; e, fissato poi una volta, in conseguenza di essi, il sito del terzo, il problema diventa indeterminato; cioè » comunque s' iscriva nella curva un quadrilatero, sicchè due de'

$$2(b-b')\frac{(b+b')\left\{\begin{matrix}+\,maz'(a-z')\\+\,n(a^2-z'^2)\end{matrix}\right\}-v'\left\{\begin{matrix}-\,z'(bb'+ma^2+2na)\\+\,a\,(bb'+ma^2+2na)\end{matrix}\right\}}{D.D''}=$$

$$2(b-b')(a-z')\,\frac{(b+b')\,(maz'+nz'+na)-v'\,(bb'+ma^2+2na)}{D.D''}$$

Adunque pel termine I. si ha

$$b''(z''-z)=2b''(b-b')\,(a-z')\,\frac{(b+b')\,(maz'+nz'+na)-v'(bb'+ma^2+2na)}{D'D''}$$

Nel termine II. si ha poi

$$a-z=a-\frac{z'(b^2+ma^2)-2abv'+2na^2}{2z'(ma+n)-2bv'+(b^2-ma^2)}=\frac{(\,b^2-a(ma+2n)\,)\,(a-z')}{D}$$

E così nel termine III. si troverà

$$a-z''=\frac{(\,b'^2-a(ma+2n)\,)\,(a-z')}{D''}$$

» suoi lati passino per i primi due punti, ed un terzo lato sia » parallelo alla retta, che li contiene, il quarto lato pas» serà sempre pel terzo punto «. In altri termini si avrà il seguente

---

quindi il termine II. diverrà

$$-v''(a-z)=-\frac{2b'(maz'+nz'+na)-v'\left(b'^2+a(ma+2n)\right)}{D''}\times(a-z')\frac{b^2-a(ma+2n)}{D}$$

e 'l termine III.

$$-v(a-z'')=-\frac{2b(maz'+nz'+na)-v'\left(b^2+a(ma+2n)\right)}{D''}\times(a-z')\frac{b'^2-a(ma+2n)}{D''}$$

Riunendo questi due termini, sviluppando, e riducendo, si troverà

$$-\left(v''(a-z)+v(a-z'')\right)=$$

$$-2(a-z')\frac{\left(bb'(b+b')-a(ma+2n)(b+b')\right)(maz'+nz'+na)-v'\left(b^2b'^2-a^2(ma+2n)^2\right)}{D.D''}=$$

$$-2(a-z')\left(bb'-a(ma+2n)\right)\frac{(b+b')(maz'+nz'+na)-v'(bb'+ma^2+2na)}{D.D''};$$

osservando che sia

$$b^2b'^2-a^2(ma+2n)^2=\left(bb'-a(ma+2n)\right)\left(bb'+a(ma+2n)\right).$$

In conseguenza riunendo tutt' i tre termini, tolto il denominator comune D.D'', si avrà

$$b''(z''-z)-v''(a-z)-v(a-z'')=$$

$$b''(b-b')-\left(bb'-a(ma+2n)\right)(a-z')\left((b+b')(maz'+nz'+na)-v'(bb'+ma^2+2na)\right)=0$$

TEOREMA 1.°

Se da due punti B, B', dati nel piano di una curva conica, s' inflettano a qualunque punto del suo perimetro le secanti BV', $B'V'$, che di nuovo l' incontrino in V, V'', e da una di queste sezioni, p. e., da V, si conduca la corda VV''' parallela a BB'; la congiungente della sua estremità V''' con l' altra sezione V'' incontrerà la BB' sempre in un medesimo punto B''.

È questo il teorema che corrisponde precisamente al lemma, che si rileva da Pappo pel solo caso del cerchio, come innanzi si è detto. E non sarà superfluo soggiugner l' inverso; cioè:

TEOREMA 2.°

Se da due dati punti B, B'', s' inflettano ad una curva conica due secanti, BVV_{1}, $B''V''V'$, sicchè la congiungente di due delle sezioni, p. e., VV'', sia parallela a BB''; la congiungente delle altre due sezioni $V'V'$ passerà sempre per uno stesso punto B' messo per dritto co' primi due.

§. 4. Se dati due de' tre punti, p. e., B, B', voglia determinarsi il terzo B'', la stessa relazione (E) mostra come ciò debba conseguirsi, mentre ci dà per esso

$$b'' = \frac{bb' - a(ma + 2n)}{b - b'} \qquad \text{(G)}$$

ch' è il valore dell' ordinata del terzo punto. Questa espressione può facilmente costruirsi, ma, ove fia d' uopo assegnare

un tal punto, sarà meglio rilevarlo coll' arbitraria inflessione di due secanti; e, per brevità, lo designeremo in seguito, ove occorra, col nome di *punto di conseguenza* a riguardo di due dati punti.

§. 5. Se la corda parallela a BB′ invece di partire dalla sezione V parta dall' altra V″, la congiungente del suo estremo colla prima sezione V dovrà del pari incontrarsi colla BB′ sempre in un medesimo punto: ma poichè l' analisi dà, per questo caso

$$b'' = -\frac{bb' - a(ma + 2n)}{b - b'}$$

ne conchiuderemo, che questo secondo punto cada dal lato opposto al primo rispetto all' asse delle ascisse, ad egual distanza dal punto A, in cui l' asse medesimo, cioè il diametro OX, incontra la BB′.

fig. 2. §. 6. Evvi ad osservare, che se abbiasi $b'' = o$, cioè che il punto B″ cada nel punto A, si avrà per tal caso dalla (G)

$$bb' - a(ma + 2n) = o$$

d' onde $b = \frac{a(am + 2n)}{b'}$, e $b' = \frac{a(ma + 2n)}{b}$

Ora i secondi membri di queste espressioni pareggiando i valori, che acquista y nelle equazioni delle polari de' punti B, B′, espresse da

$$by = x(ma + n) + an \quad (*)$$
$$by' = x(ma + n) + an$$

(*) Abbiamo altrove avvertito, che la polare di un punto esistente sul piano di una curva conica sia quella retta, in cui vanno a con-

quando nell' una, e nell' altra l' x diviene o, ne segue, che pel caso di $b''=o$, la polare di B debba passare pel punto B', e quella di B' per B. Vale a dire: *Se sien dati due punti tali, che la polare dell' uno passi per l' altro, il loro punto di conseguenza si troverà nell' intersezione della congiungente de' punti medesimi, e del diametro, che le corrisponde.*

§. 7. La formola (G) applicata alle diverse curve coniche dà

per l' ellisse $$b''=\frac{p^2bb'-q^2a(2p-a)}{p^2(b-b')}$$

per l' iperbole $$b''=\frac{p^2bb'+q^2a(2p-a)}{p^2(b-b')}$$

ove p, e q dinotano i semidiametri paralleli agli assi;

pel cerchio $$b''=\frac{bb'-a(2r-a)}{b-b'}$$

per la parabola $$b''=\frac{bb'-2aa}{b-b'}$$

§. 8. Dall' esame della sola relazione, o vogliam dire fattore (E), rimane il proposto problema compiutamente risoluto; e quindi sarebbe superfluo occuparci dell' altra: ma poichè

---

correre le tangenti tirate alla curva per le estremità di qualunque corda, che passa per un tal punto, il quale alla sua volta dicesi polo di quella retta. Qui rammenteremo, che l' equazione di una tal retta, cioè della polare di un punto (x', y'), riferito alla curva $y^2=mx^2+2ax$ sia, com' è noto dalle istituzioni di Geometria a due coordinate

$$yy'=x(mx'+a)+ax'$$

conviene indagar per tutt' i versi il senso de' risultamenti analitici, cui si perviene, noi cercheremo spiegare anche il senso dell' altra.

E da prima osserveremo sulla relazione (F), che mentre vi manca la b'', vi figuran poi tutte le altre grandezze costanti messe a calcolo nel problema, e le coordinate del vertice V'. Quindi essa dee tener luogo ne' risultamenti per rispondere ad una quistione analoga alla proposta, ma in cui manchi una condizione nascente dal terzo punto (a, b''). Or egli è chiaro, che quando manchi questo terzo punto, il problema proposto riducesi evidentemente a quello di: *iscrivere nella curva un triangolo VV'V'', sicchè due lati passino pe' punti B, B', e 'l terzo VV'' risulti parallelo a BB'*. Infatti se procedasi alla risoluzione di questo problema, seguendo lo stesso metodo tenuto nel problema principale, si ricadrà precisamente nella sola relazione (F). Questa poi scindesi naturalmente nelle altre due

fig. 3.

$$z' - a = o$$

$$(b + b')(maz' + nz' + na') - v'(bb' + ma' + 2na) \quad \text{(II)}$$

delle quali la prima dinota la retta, che passa pe' dati punti, e la sua presenza corrisponde al caso, in cui tutt' i punti dati si riuniscano nel solo punto A. L' altra poi appartiene alla retta, che risolve il problema or ora accennato.

Per costruir questa retta nella sua equazione porremo in primo luogo $v' = o$, e ne risulta

$$z' = \frac{-na}{ma + n}$$

ch' è il valore, che acquista l' x in ciascuna delle equazioni delle polari dei punti B, B', quando vi si fa $y = o$. Adun-

que l'intersezione di queste due polari è un punto della retta a costruirsi. Per trovarne un altro punto è opportuna la supposizione di $v' = b + b'$ . . . . . . (I)
in conseguenza della quale si ha

$$z' = \frac{bb' + ma^2 + na}{ma + n} \quad \text{(K)}$$

eliminando tra (I), (K) una volta la b', ed una volta la b, si avranno le equazioni

$$v' - b = \frac{ma + n}{b}(z' - a)$$

$$v' - b' = \frac{ma + n}{b'}(z' - a)$$

le quali dinotando le parallele condotte da' punti B, B' alle loro polari respettivamente, mostrano che la loro intersezione è un altro punto della retta a costruirsi. Laonde essa è pienamente determinata; e 'l problema si comporrà conducendo dai punti B, B' le BS, B'S parallele alle loro polari PM, PM'. Ciascuno de' punti V', v', nascenti dall' incontro della retta, che passa pe' punti P, S colla curva, potrà prendersi per un vertice del triangolo richiesto.

§. 9. Questa risoluzione del problema, che per incidenza ci si è presentato a trattare, rilevasi immediatamente dall' analisi geometrica. Ed in vero, supponendo già iscritto il triangolo cercato, segneremo le PM, PM', polari de' dati punti; e poichè è noto, che queste, e la curva dividono armonicamente tutte le secanti, che passano pei punti medesimi, avremo le analogie

$$BV' : BV :: V'M : MV$$

$$B'V' : B'V'' :: V'M' : M'V''$$

ma per le parallele BB′ , VV″ sta

$$BV' : BV :: B'V' : B'V''$$

starà perciò

$$V'M : MV :: V'M' : M'V''$$

Da che si scorge essere MM′ parallela a VV″ , e quindi anche a BB′. Sicchè si avrà

$$BV' : V'M :: B'V' : V'M'$$

Ciò premesso si unisca PV′ , e si distenda finchè incontri in S la parallela condotta da B a PM ; avendosi in tal modo

$$BV' : V'M :: SV' : V'P$$

si avrà pure

$$SV' : V'P :: B'V' : V'M'$$

Ond' è che, risultando B′S parallela a PM′, si ricade nella stessa composizione precedente .

§. 10. Assoluto quanto riguardava il problema , che ci proponemmo da principio, e discussi i risultamenti , cui ci ha condotti la soluzione , che ne abbiam data , cade ora in acconcio qualche breve riflessione . Ed in vero non può negarsi , che una tale soluzione sia tutta analitica ; ma chi voglia darsi la pena di comprovare que' risultamenti, rimarrà sgomentato dalla prolissità de' calcoli, in cui conviene impegnarsi, per la separazione de' fattori , da' quali si veggono avvolti : e , per convincersene a colpo di occhio , basta riflettere , che il complesso de' fattori, sviluppato, presenta un cumulo di 90 termini , tra' quali convien lavorare per ottenerne lo scindimento. E dobbiamo

confessare, che la sola ostinazione e pazienza ci ha dato forza a protrarre il calcolo fino al punto, che si è fatto. Tutto il difficile, com' è chiaro, è riposto nell' eliminazione tra le sei equazioni (B), (C); e si è veduto che non abbiamo pur omesso ricorrere a quelli artifizj, che sogliono facilitare, ed abbreviare le algebriche operazioni. Ma vi sarebbe via da evitare quel fattore, che nel senso preciso della quistione non dovrebbe figurarvi? L' unico mezzo da conseguir quest' intento sarebbe quello di particolarizzare in guisa la soluzione della quistione proposta da non potersi adattare al caso, cui corrisponde il fattore medesimo, dappoichè questo allora non deve incontrarsi. Ma l' espediente più sicuro, cui si può ricorrere in tutt' i casi, è quello di rivolgersi a geometriche considerazioni, le quali tendono per loro natura a rendere particolari le soluzioni a' casi, che si considerano; e basta esservi anche per poco esercitati, per riconoscere la fecondità, e l' importanza di questa massima, della quale qui daremo luminose prove.

Ripigliando dunque la quistione già precedentemente esposta, e ponendo mente alla sua natura, ci è facile scorgere, che, trattandosi di un problema, in cui per principal soggetto vengono considerate corde di una curva conica, debba riescire di grande ajuto il teorema geometrico (*), che: *il punto in cui s' incontrano due corde comunque iscritte in una curva coni-*

(*) Questo teorema trovasi da noi dimostrato in altra memoria col titolo di: *Teoremi sulle curve coniche utili alla risoluzione di difficili problemi*,

ca sta per dritto coi punti di concorso delle tangenti condotte alle loro estremità . Valendoci quindi di questa proprietà delle curve , ritenendo gli stessi assi , e le stesse segnature di prima porremo , che i tre lati del quadrilatero * , che passano per B , B′, B″ incontrino l' asse delle ascisse ne' punti T ; T′, T″, ed applicheremo poi a' vertici V , V′ , V″, V‴ le tangenti , delle quali quelle , che appartengono a V, V″ incontrino in U, U″ l' asse delle ordinate , cioè la tangente in O ; e le altre , che appartengono a V′ , V‴, incontrino in U′, U‴ la tangente parallela all'asse medesimo tirata dall' altro vertice del diametro, che fa da asse delle ascisse. Per tal modo i punti U, U′, T staran per dritto , al pari degli altri U′ , U″ , T′, e di U″, U‴, T″. Ciò premesso , chiamiamo r , r' , r'', r''' le ordinate de' punti U , U′, U″ , U‴ , le ascisse de' quali sono respettivamente $o, -\frac{2n}{m}, o, -\frac{2n}{m}$. L' equazione della tangente in V sarà della forma

* *fig.* 4.

$$yv = x(mz + n) + nz :$$

pel punto U avendosi dunque $x = o$, si avrà

$$y = r = \frac{nz}{v} ; \qquad (1.)$$

e poichè si ha $v^2 = mz^2 + 2nz$, ne dedurremo

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{2nr^2}{n^2 - mr^2} \\ v &= \frac{2n^2 r}{n^2 - mr^2} \end{aligned}\right\} \qquad (M)$$

Di più l' equazione della retta BV essendo

$$y - b = \frac{b - v}{a - z}(x - a)$$

pel punto T aveadosi $y = o$, si avrà

$$x = \frac{bz - av}{b - v};$$

espressione, che con la sostituzione de' valori di z, e v, più sopra trovati, diviene

$$x = 2nr \frac{br - an}{bn^2 - bmr^2 - 2n^2r}.$$

Quindi l' equazione della retta, che passa pe' punti U, T sarà

$$y - r = \frac{r}{-2nr \frac{br - an}{bn^2 - bm^2r - 2n^2r}} x;$$

e pel punto U', cioè pel punto $\left(-\frac{2n}{m}, r'\right)$, si avrà in conseguenza

$$r' = \frac{n}{m} \frac{bn - 2nr - mar}{br - an}. \qquad \text{(N)}$$

Un identico procedimento coll' altro lato V'V'', che passa per B', dandoci

$$r'' = \frac{nz''}{v''} \qquad \text{(L')}$$

e poscia

$$\left\{ \begin{aligned} z'' &= 2n \frac{r''^2}{n^2 - mr''^2} \\ v'' &= 2n^2 \frac{r''}{n^2 - mr''^2} \end{aligned} \right\} \text{(M')}$$

pe' tre punti U', U'', T' in linea retta si rileverà,

$$r' = \frac{n}{m} \frac{b'n - 2nr'' - mar''}{b'r - an} \qquad \text{(N')}$$

Pareggiando ora le due espressioni (N), (N′) avremo l'equazione

$$\frac{bn - 2nr - mar}{br - an} = \frac{b'n - 2nr'' - mar''}{b'r' - an};$$

equazione, che sviluppata dà prontamente

$$\frac{rr''(am + 2n) - an^2}{n(r - r'')} = \frac{bb' - a(am + 2n)}{b - b'} \qquad (P)$$

Intanto l'equazione della tangente nel punto V‴ essendo

$$-vy = x(2m + n) + nz \qquad (*)$$

pel punto U‴, la di cui ascissa è $-\frac{2n}{m}$, avremo

$$r''' = \frac{n}{vm}(mz + 2n);$$

e sostituendo in questa espressione per z, v i loro valori assegnati più sopra in (M), troveremo

$$r''' = \frac{n^2}{mr}$$

In conseguenza la retta, che passa pe' punti U‴, U″ avrà per equazione

$$y - r'' = \frac{r'' - \frac{n^2}{mr}}{\frac{2n}{m}} x$$

E pel punto T″ si otterrà

$$x = \frac{2nrr''}{n^2 - mrr''}.$$

(*) Diamo il segno negativo al termine vy, dappoichè le coordinate del punto V‴ sono, com'è chiaro, z, e $-v$.

Or la retta, che passa pe' punti B'', V''', cioè pe' punti (a, b''), $(z, -v)$ avendo per equazione

$$y - b'' = \frac{b'' + v}{a - z}(x - a),$$

per lo stesso punto T'' dà

$$x = \frac{b''z + av}{b'' + v};$$

ovvero, sostituendo a z, v i valori (M),

$$x = 2nr\frac{b''r + an}{b''n^2 - b''mr^2 + 2n^2r}$$

Laonde avremo l' equazione

$$\frac{rr''}{n^2 - mrr''} = \frac{b''r + an}{b''n^2 - b''mr^2 + 2n^2r},$$

la quale sviluppata conduce a

$$b'' = \frac{rr''(am + 2n) - an^2}{r - r''}:$$

e confrontando quest' espressione con (P), rileveremo

$$b'' = \frac{bb' - a(am + 2n)}{b - b'}.$$

Cioè la stessa relazione (G) ottenuta per altra via, libera dal fattore, che l' associava nella prima soluzione.

§. 11. Questa soluzione non ha certo il pregio di essere interamente analitica (*); ma se riflettasi, che in questa, fissato

(*) Si può osservare che il metodo ond' è guidata la presente soluzione è un misto di Cartesiano, e di quello a coordinate, essendoci giovati del comodo, che offrono le formole di quest' ultimo per render quello più spedito. Ed è in tal modo, che questi metodi (che in fondo non ne formano che uno) si ajutano, e si scortano a vicenda.

una volta il principio, che abbiam preso per guida, siam proceduto innanzi senza ostacoli, mentre nella prima soluzione siamo stati costretti di andar quasi a tentoni, si giudicherà più rettamente della differenza, che passa tra loro. Un servigio però di ben altra importanza ci presta, e quasi senza averlo preteso, questa seconda soluzione; ed all' occhio del geometra avvezzo a trar partito da soluzioni tessute con vario metodo, non sarà certamente isfuggito. Il teorema geometrico, di cui ci siam valuti a solo oggetto di render particolare la soluzione del problema, e ricondurla al senso preciso com' è proposto, avendo richiesta l' introduzione di altre incognite, che abbiam dinotate per r, r', r'', r''', ci ha poi condotti ad equazioni solamente in r, r'' sgombre in tutto dalle z, v, z'', v''. Vale a dire, che invece di calcolare su queste quattro variabili, abbiam calcolato sopra le due r, r'', ed esaminando per qual nesso sien tra loro collegate, si rileva da (L), (L'), che sia

$$r = n\frac{z}{v} \quad , \quad r'' = n\frac{z''}{v''}$$

e notisi, che su tal nesso poggia tutto il cardine della soluzione (*). Or chi non vede quale aurea e preziosa sorgente

---

(*) Ognuno avrà già compreso che invece delle coordinate de' vertici del quadrilatero si vegga introdotto il loro rapporto; ed è noto quanto giovi talora questo ripiego alle eliminazioni; cosicchè non mancheranno di quelli, che verranno a dirci *trattarsi di un affar comune, e da non meritare attenzione*. Ma domanderemo a costoro, perchè non vi è stato finora, chi siesi avvisato di ricorrere a tal ripiego per le ricerche di cui ci stiamo occupando? E pur si sa quanti sforzi sieno stati fatti da valenti

ci sviluppano siffatte relazioni? Tra i varj metodi immaginati per l' eliminazione vi ha quello, che insegna ad introdurre nelle equazioni in luogo di due variabili il loro rapporto, e questo metodo, usato a proposito, è valevole il più delle volte a dar que' risultamenti, che si cercherebbero invano per altre vie.

§. 12. Usandone nel nostro caso, riprenderemo le equazioni (B), (C), per le quali il problema trovasi messo in equazione, e ponendo

$$\frac{z}{v} = r \quad , \quad \frac{z'}{v'} = r' \quad , \quad \frac{z''}{v''} = r''$$

rileveremo dalle (C)

$$z = 2n \frac{r^2}{1 - mr^2} \, , \; z' = 2n \frac{r'^2}{1 - mr'^2} \, , \; z'' = 2n \frac{r''^2}{1 - mr''^2}$$

$$v = 2n \frac{r}{1 - mr^2} \, , \; v' = 2n \frac{r'}{1 - mr'^2} \, , \; v'' = 2n \frac{r''}{1 - r''^2}$$

sostituendo ora questi valori nelle equazioni (B) ridotte alla se-

---

analisti per potervi riuscire. Non è però dal caso, che debbono attendersi cosiffatti risultamenti; essi possono unicamente attignersi dal confronto, e dall' impiego di diversi metodi sulle stesse quistioni, come il sommo Lagrange ci ha fatto sentire nella di lui sentenza da noi presa ad epigrafe, e com' Ei stesso mostra costantemente di aver praticato. E da ciò dedurremo un' util consiglio per taluni nostri professori di oggigiorno, se vogliono trar profitto dai sommi uomini, cioè che non basta solo ostentar rispetto po' loro nomi, e far pompa di averli in bocca ad ogni occasione; ma conviene che ne studiino le opere, e si sforzino ad intenderle, e ricavarne que' principj, e massime di scienza, che possono vantaggiosamente istruirli, e farli utilmente progredire nelle Matematiche.

guente forma

$$a(v - v') - b(z - z') - vz' + zv' = o$$
$$a(v'' - v') - b'(z'' - z') - v''z' + z''v' = o$$
$$a(v + v'') + b''(z - z'') - vz'' - zv'' = o$$

le medesime diverranno

$$a(1 + mrr') - b(r + r') + 2nrr' = o$$
$$a(1 + mr''r') - b'(r'' + r') + 2nr''r' = o$$
$$a(1 - mrr'') + b''(r - r'') - 2nrr'' = o$$

Eliminando r' tra le due prime equazioni si avrà

$$\Big(rr''(am+2n) - a\Big)(b-b') - \Big(bb' - a(am+2n)\Big)(r-r'') = o$$

d'onde

$$\frac{rr''(am+2n) - a}{r - r''} = \frac{bb' - a(am+2n)}{b - b'}.$$

La terza ci da immantinente

$$b''(r - r'') = rr''(am + 2n) - a$$

ovvero

$$b'' = \frac{rr''(am + 2n) - a}{r - r''}$$

e quindi avremo

$$b'' = \frac{bb' - a(am + 2n)}{b - b'}$$

ch' è il medesimo risultamento ottenuto più sopra da due altre diverse vie.

§. 13. Dopo aver mostrato come possa attignersi da' metodi analitici la verità esposta, non sarà superfluo esaminare quanto valga per essa la Geometria.

Proponendoci dunque a risolvere il problema per mezzo di lei, supporremo già iscritto il quadrilatero $mnrq$, i cui lati mn, nr, rq passino respettivamente pe' dati punti B, B', B'', e 'l quarto mq sia parallelo a BB'. Se l' ultimo lato si distenda in H, si rileveranno le due analogie *fig. 5*

$$Hn : Hm :: B'n : B'B$$
$$Hr : Hq :: B'r : B'B''$$

dalle quali si ha

$$Hn.Hr : Hm.Hq : B'n.B'r : B'B.B'B''$$

Ma la prima di queste ragioni è quanto quella de' quadrati di CN, CM, semidiametri paralleli respettivamente ad rn, qm; starà perciò

$$CN^2 : CM^2 :: B'n.B'r : B'B.B'B''$$

Ora essendo data la ragione di CN^2 a $B'n.B'r$, sarà pur data quella di CM^2 a $B'B.B'B''$; ed in conseguenza essendo date le CM, B'B, sarà data eziandio la B'B'', e con essa il punto B''. Ond'è che il problema è più che determinato; vale a dire che il sito di ciascuno de' dati punti dipende da quello degli altri due; ed assegnato un tal punto, il problema diventa indeterminato, come si era già diversamente rilevato.

§. 14. Se la corda parallela a BB', invece di partire da m parta da r, e sia rs, la sm segnerà sulla BB' un altro dato punto B''. Tirando però il diametro CA, conjugato a CM, si scorge, che que' due punti debban cadere ad egual distanza, e a parti opposte del punto A; dappoichè quel diametro, bisecando le corde rs, qm, bisecherà pure la retta compresa tra i due punti B''.

§. 15. Quando i punti r, q nella variazione del quadrilatero *mnrq* si riuniscano in un solo *, il quadrilatero si riduce al triangolo *mnq*, e la *rq* senza cessare di passare pel punto B″, diventa tangente alla curva in q. Quindi se dati i due punti B, B′ si voglia iscrivere nella curva un triangolo *mnq*, di cui due lati passino per B, B′, e 'l terzo *mq* sia parallelo a BB′, basterà assegnare il punto B″, e condurre la tangente B″q. Sarà q un vertice del triangolo; e l' altra tangente B″q' segnerà il vertice di un secondo triangolo, che risolve egualmente il problema. Ed ecco rilevata per tutte le curve del 1.° ordine una costruzione identica a quella, che fu data da Pappo del problema istesso, pel caso semplicissimo del cerchio, e che vedesi anche in altra guisa da noi risoluto al §. 8.

* *fig.* 6.

§. 16. Se avvenga, che il punto B″ coincida col punto A, in tal caso è chiaro, che la *mr* debba incontrare il diametro CA in un dato punto P, polo di BB′; il che vedesi sol che si compia il quadrilatero a lati paralleli *mqrs*, di cui *mr* sarà una diagonale. Ed ecco generalizzato per tutte le curve coniche il bel teorema rilevato la prima volta sul cerchio dal nostro acutissimo geometra sig. Scorza, cioè, che se i due punti B, B′ d' onde partono le inflesse Bn, B′n sien tali, che nel condurre la corda *mq* parallela a BB′, la *qr* passi per A, la retta delle sezioni, *mr*, debba incontrare il diametro CA nel dato punto P, ch' ei chiama punto di armonica divisione, e che corrisponde al polo di BB′. Intanto suppongasi, che la inflessa Bn divenga tangente, e tocchi la curva in n'; l' altra inflessa sarà B′n', e sarà $n'q'$ la retta delle sezioni, la

* *fig.* 7.

quale perciò passerà per lo stesso punto P. Quindi la $B'n$ sarà la polare del punto B. Similmente, se facciasi divenir tangente una inflessa dal punto B', si vedrà che la Bn'' debba passare per P, e che sia perciò polare di B'. Segue da ciò, che quando la rq passa per A, cioè quando il punto di conseguenza tra i due punti B, B' coincide col punto A, questi due punti son tali che la polare di B passa per B', e quella di B' per B. E dopo ciò il teorema del sig. Scorza potrà enunciarsi nel seguente modo.

Teorema 3.°

Se sien dati due punti B, B' tali, che la polare dell' uno passi per l' altro, e s' inflettan da essi a qualunque punto n di una curva conica le secanti Bmn, B'rn, la retta delle sezioni mr passerà per un dato punto P, polo di BB'.

Ma su questa importante verità ritorneremo poco appresso per rilevarla algebricamente.

§.17. Sia D qualunque altro punto dato su la BB'; e per esso conducasi ad una delle sezioni m, r, p. e., ad r, la secante Drk; passando rq pel dato punto B'', anche la mk dovrà passare per un altro dato punto D'', e ch'è propriamente *il punto di conseguenza* rispetto a' dati punti D, B''. Or si scorge che la figura $mnrk$ sia un quadrilatero iscritto, i di cui lati mn, nr, rk, km passano respettivamente pe' quattro punti dati B, B', D, D' situati in linea retta, ed è chiaro, che comunque varii questo quadrilatero; purchè tre de' suoi lati mn, nr, rk *fig. 8.* * *teor. 1.*

passino pe' tre punti dati B, B', D, il quarto *mk* passerà costantemente pel dato punto D'. Quindi il problema di: *iscrivere in una curva conica un quadrilatero, i cui lati passar debbano per quattro punti dati in linea retta*, sarebbe più che determinato, dappoichè il sito del quarto punto dipende da quello degli altri tre. Ed in tal modo rimane generalizzato per tutte le curve di 1° ordine il bellissimo teorema avvertito la prima volta sul cerchio (*) dal nostro insigne geometra, ed analista cav. Flauti, e che potrà enunciarsi nel seguente modo.

Teorema 4.°

Se tre lati di un quadrilatero variabile iscritto in una curva conica passino per tre punti fissi situati in linea retta, il quarto lato passerà anch' egli per un dato punto, situato sulla stessa retta.

Ma anche su questo teorema ritorneremo più innanzi in luogo opportuno, ove sarà reso più generale, e dedotto da metodi analitici; e si vedrà pure quale importante applicazione possa farsene.

(*) Questa interessante proprietà del cerchio trovasi implicitamente compresa nell' elegante geometrica soluzione data da questo benemerito Professore, fin dal 1809, del problema di: *descrivere una sfera tangente quattro sfere date di sito, e di grandezza*.

Avvertimento.

§. 18. Occorrendo in seguito di aver sovente espresse in funzione delle coordinate di un punto (t , u) quelle de' punti di contatto delle tangenti tirate da un tal punto alla curva

$$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad (a)$$

sarà bene rilevar fin da ora tali espressioni , per non ripetere più volte le cose stesse.

Egli è noto , che la retta , che passa pe' contatti delle tangenti condotte ad (a) dal punto (t , u) abbia per equazione

$$yu = x\,(tm + n) + tn : \qquad (b)$$

se eliminiamo la y tra questa , ed (a) , le radici dell' equazione di 2.° grado in x , che ne risulta , dovranno appunto corrispondere alle ascisse de' due punti di contatto ; ed eliminando poi tra le equazioni medesime la x , le radici della risultante equazione di 2.° grado in y , rappresenterebbero le corrispondenti ordinate . Intanto dall' eliminazione di y si ha l' equazione

$$x^2 - 2n\,\frac{(\,u^2 - t\,(tm + n)\,)}{(tm + n)^2 - mu^2} + \frac{n^2t^2}{(\,tm + n\,)^2 - mu^2} = 0$$

Questa equazione risoluta dà

$$x = n\,\frac{u^2 - t(tm + n) \pm \sqrt{(\,u^2 - t(\,tm + 2n))}}{(tm + n)^2 - mu^2}$$

e dispensandoci dall' altra eliminazione della x , il suo valore or or trovato , sostituito in (b) , darà

$$y = n\,\frac{mu \pm (\,tm + n\,)\,\sqrt{(\,u^2 - t\,(\,tm + 2n))}}{(\,tm + n\,)^2 - mu^2}$$

Designando adunqne i due punti di contatto per $(z\,,v)$, (z',v'), e facendo per brevità

$$tm + n = q$$
$$u^2 - t(tm + 2n) = s^2$$

rileveremo

$$\left.\begin{aligned} z &= n\frac{u^2 - tq + us}{q^2 - mu^2} \quad , \quad z' = n\frac{u^2 - tq - us}{q^2 - mu^2} \\ v &= n\frac{nu + qs}{q^2 - mu^2} \quad , \quad v' = n\frac{nu - qs}{q^2 - mu^2} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

E son questi i valori delle coordinate de' due punti di contatto in funzione delle coordinate del punto d' onde partono le tangenti . Da tali espressioni sarà poi opportuno , per maggior facilitazione de' calcoli , che dovranno eseguirsi , rilevare le seguenti altre

$$\left.\begin{aligned} z - z' &= 2n\frac{us}{q^2 - mu^2} \quad , \quad z + z' = 2n\frac{u^2 - tq^2}{q^2 - mu^2} \\ v - v' &= 2n\frac{qs}{q^2 - mu^2} \quad , \quad v + v' = 2n^2\frac{u}{q^2 - mu^2} \\ zz' &= n^2\frac{t^2}{q^2 - mu^2} \quad , \quad vv' = n^2\frac{t(tm + 2n)}{q^2 - mu^2} \\ zv' &= n^2\frac{t(u + s)}{q^2 - mu^2} \quad , \quad z'v = n^2\frac{t(u - s)}{q^2 - mu} \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

PROBLEMA II.

§. 19. *Due lati di un triangolo variabile $VV'V''$, iscritto in una curva conica siano assoggettati a passare costantemente per due punti fissi B, B'; si cerca il luogo geometrico del punto U, concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero VV'* (*) .

fig. 9.

Sol. Si prendano per assi la tangente OY parallela alla congiungente dei punti B, B', e 'l diametro OX corrispondente al punto di contatto. La curva proposta potrà così generalmente rappresentarsi coll' equazione

$$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad (A)$$

Si chiamino t, u le coordinate del punto U; z, v; z' v', quelle delle estremità del lato libero VV'; b, b' le ordinate de' dati punti B, B', ed a la loro ascissa comune. Saranno in tal modo

---

(*) Se invece de' punti B, B' fossero date di sito due rette Pb, Pb', ed invece del triangolo iscritto $VV'V''$ si considerasse il corrispondente triangolo circoscritto $UU'U''$ è chiaro, che il problema qua sù proposto sarebbe identico a quello in cui si dicesse: *due vertici U', U'' di un triangolo variabile $UU'U''$ circoscritto ad una sezione conica siano assoggettati a percorrere le due rette date di sito* Pb, Pb'; *si cerca la curva descritta dal vertice libero* U, dapoichè dovendo le corde de' contatti VV'', $V'V''$, passare per due punti dati B, B', poli rispettivi delle date rette Pb, Pb', vedesi manifestamente che si ricada nello stesso problema. E questa osservazione valga in generale per notare, che da un poligono iscritto di qualsivoglia numero di lati, assoggettati a passare per punti dati, si fa passaggio nel modo stesso ad un poligono circoscritto, i di cui vertici sieno allogati sopra altrettante rette date di sito. E viceversa.

$$yu = x(tm + n) + nt \qquad (B)$$

$$\left.\begin{aligned} y - b &= \frac{b - v}{a - z}(x - a) \\ y - b' &= \frac{b' - v'}{a - z'}(x - a) \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

le equazioni del lato libero (*), e degli altri due respettivamente. Chiamando dunque z'', v'' le coordinate del vertice V''; poichè la retta (B) passa pe' punti (z, v), (z', v'), le (C) passano amendue per (z'', v''); e perchè questi tre punti esistono sulla curva, avremo le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned} uv &= t(mz + n) + nz \\ uv' &= t(mz' + n) + nz' \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

$$\left.\begin{aligned} v'' - b &= \frac{b - v}{a - z}(z'' - a) \\ v'' - b' &= \frac{b' - v'}{a - z'}(z'' - a) \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= mz^2 + 2nz \\ v'^2 &= mz'^2 + 2nz' \\ v''^2 &= mz''^2 + 2nz'' \end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

Queste sette equazioni esprimono tutte le condizioni del proble-

(*) Il lato libero essendo la retta tra i contatti delle tangenti condotte dal punto (t, u) alla curva (A), è chiaro, che la sua equazione sia della forma (B).

ma; e converrà eliminarne le variabili z, v, z', v', z'', v'', affin di ottenere una equazione nelle sole incognite t, u, che sarà quella del luogo geometrico cercato.

Nel §. 18. abbiam mostrato come possano esprimersi le coordinate dei punti (z, v), (z', v') in funzione di quelle del punto (t, u). Or quì cercheremo di avere un'equaquazione libera dalle coordinate z'', v'', perchè sostituendovi quelle espressioni, l'eliminazione sarà compiuta. Per isbarazzarci delle z'', v'' il metodo più agevole, e spedito, che si presenta a prima vista, è quello di determinare i loro valori una volta in funzione delle coordinate del punto V, ed altra volta in funzione di quelle del punto V', e dal pareggiamento di questi valori avremo l'equazione nelle sole coordinate z, v; z', v'. Valendoci dunque delle espressioni (D) rilevate per lo scopo medesimo nel problema 1°, avremo da una conveniente apposizione di apici

$$z'' = \frac{z(b^2 + ma^2) - 2abv + 2na^2}{2z(ma + n) - 2bv + (b^2 - ma^2)},$$

e

$$z'' = \frac{z'(b'^2 + ma^2) - 2ab'v' + 2na^2}{2z'(ma + n) - 2b'v' + (b'^2 - ma^2)}.$$

Quindi l'equazione

$$\frac{z(b^2 + ma^2) - 2abv + 2na^2}{2z(ma + n) - 2bv + (b^2 - ma^2)} = \frac{z'(b'^2 + ma^2) - 2ab'v' + 2na^2}{2z'(ma + n) - 2b'v' + (b'^2 - ma^2)} \quad (G)$$

la quale, sviluppata, e ridotta, potrà essere ordinata nel

seguente modo

$$\left.\begin{array}{l}
+\,(z-z')\Big(b^2b'^2-a^2\,(m^2a^2+4n^2+4mna)\Big)\\
-\,(z+z')\,(b^2-b'^2)\,ma^2\\
+\,2zz'\,(b^2-b'^2)\,(ma+n)\\
-\,2na^2\,(b^2-b'^2)\\
-\,2a\,(ma+2n)\,(bvz'-b'v'z)\\
+\,2bb'\,(abv'-ab'v)\\
+\,2a\,(ma+2n)\,(abv-ab'v^2)\\
-\,2bb'\,(bv'z-b'vz')
\end{array}\right\}=o$$

Ovvero

$$\left.\begin{array}{l}
+\,(z-z')\Big(bb'-a(ma+2n)\Big)\Big(bb'+a(ma+2n)\Big)\\
-\,(b^2-b'^2)\Big(ma^2\,(z+z')+2na^2-2zz'\,(ma+n)\Big)\\
-\,2a\,(ma+2n)\,(bv'z-b'v'z)\\
+\,2bb'\,(abv'-ab'v)\\
+\,2a\,(ma+2n)\,(abv-a'b'v')\\
-\,2bb'\,(bv'z-b'vz')
\end{array}\right\}=o$$

Possiamo ora sostituire in questa equazione per z, z', v, v', le espressioni del §. 18, e scrivendo per brevità M invece di $a(ma+2n)$ essa diverrà dopo le riduzioni

$$\left.\begin{array}{l}
+\,us\,(bb'-\mathrm{M})\,(bb'+\mathrm{M})\\
-\,(b+b')\,(b-b')n(a-t)\,(mta+tn+na)\\
-\,\mathrm{M}ntu\,(b-b')+\mathrm{M}nts\,(b+b')\\
+\,bb'anu\,(b-b')-bb's\,(b+b')\,(mta+na)\\
+\,\mathrm{M}anu\,(b-b')+\mathrm{M}s\,(b+b')\,(mta+na)\\
-\,bb'ntu\,(b-b')-bb'nts\,(b+b')
\end{array}\right\}=o$$

Riunendo tra loro i termini, che nelle ultime quattro linee

sono moltiplicati da $(b - b')$, e quelli, che son moltiplicati da $(b + b')$, queste quattro linee si riducono ad

$$\left.\begin{array}{l} + nu(b - b')\ (a - t)\ (bb' + M) \\ - s(b + b')\ (mta + tn + na)\ (bb' - M) \end{array}\right\}$$

E tutta l'equazione diverrà così

$$\left.\begin{array}{l} \Big(s(bb' - M) + n(b - b')\ (a - t)\Big)\Big(u(bb' + M)\Big) \\ - \Big(s(bb' - M) + n(b - b')\ (a - t)\Big)\Big((b + b')\ (mta + tn + na)\Big) \end{array}\right\} = o$$

oppure

$$\Big(s(bb' - M) + n(b - b')\ (a - t)\Big)\Big(u(bb' + M) - (b + b')(mta + tn + na)\Big) = o$$

Da questo risultato si ricavano intanto due relazioni, cioè

$$s(bb' - M) + n(b - b')\ (a - t) = o$$

$$u(bb' + M) - (b + b')\ (mta + tn + na) = o$$

le quali, restituendo ad s, ed M i loro valori, divengono

$$\frac{bb' - a(am + 2n)}{b - b'}\sqrt{\Big(u^2 - t(tm + 2n)\Big)} + n(a - t) = o \quad \text{(H)}$$

$$u\Big(bb' + a(am + 2n)\Big) - (b + b')\ (mta + tn + na) = o \quad \text{(I)}$$

E quindi abbiamo un sistema di due equazioni per la soluzione del proposto problema (*).

(*) La dubbia soluzione risultante dal metodo puramente algebrico tenuto nel trattare il problema proposto, è un di que' paradossi, che han dato luogo più di una volta a sommi analisti di esitare su' bizzarri risultamenti dell' analisi, ed a' quali potrebbesi con più ragione adattare ciò, che scriveva l' illustre matematico di Ginevra al professore Flauti nel-

§. 20. Or che diremo di questo duplice risultamento, ossia di questi due fattori, de' quali uno dinota una curva, l' altro una retta, e che nulladimeno debbono l' uno e l' altro risolvere lo stesso problema? L' è questa una circostanza degna di speciale attenzione. Senza dubbio ognun comprende, che tali due diverse soluzioni debbansi appartenere a due

---

l' inviargli la sua soluzione algebrica del principal problema sulla piramide triangolare: *Faut-il donc que même dans une science, dont l' évidence des principes et la simplicité de son objet doivent garantir l' esprit humain de tout écart dans la route de la vérité, il doive encore conserver quelques doutes sur la certitude des resultats auxquels il parvient; et qu'il reçoive ainsi une triste leçon d' humilité?* Nè ciò credasi qui detto fuori proposito; mentre potrebbesi taluno inconsideratamente avvisare di rigettare il fattore, che rappresenta la curva, e *conchiudere, che la locale cercata fosse sempre una retta*; conchiusione del tutto erronea. Ma ad un paradosso più rimarchevole dà luogo l' altro problema, di cui più innanzi ci occuperemo: *Un poligono variabile di k lati sia con tal legge iscritto in una curva conica, che k—1 lati si mantengan sempre paralleli ad altrettante rette date di sito; si cerca il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero*: pel quale si vedrà con sorpresa, che così generalmente proposto debbano soddisfarvi intrinsecamente una retta, ed una curva. Questa sorta di problemi, che men degli altri sono stati considerati, e che più lo avrebbero richiesto, sono stati assai bene classificati dal nostro Flauti colla denominazione di *complessi*; e, giudicando egli del grande interesse, che possono offrire pel perfezionamento de' metodi, fin da quando presentò alla nostra R. A. delle Scienze l' indicato lavoro del Luilier, richiamava a ragione su di essi l' attenzione de' geometri. E noi crediamo, che sia ben necessario doversene far menzione nelle ordinarie istituzioni di Geometria analitica, affinchè sappiamo evitarsi gli equivoci, cui sogliono dar luogo cosiffatti proteiformi risultamenti; tanto più che a' dì di oggi i giovani limitandosi ordinariamente alla semplice lettura de' libri,

diversi casi, o piuttosto al problema medesimo guardato sotto due diversi aspetti. In fatti se il problema proposto fosse stato il seguente: *Un quadrilatero variabile VV'V''V''' sia con tal legge iscritto in una curva conica, che mentre due dei suoi* fig. 10

---

che servon loro d'istituzione, possono assai facilmente esservi indotti ove non ne sieno preventivamente avvertiti.

Ma ci sia ancor permessa a questo proposito qualche altra breve riflessione. Finchè si maneggino le sette equazioni (D), (E), (F) co' metodi generali, che l'Algebra somministra, il procedimento di eliminazione, qualunque ei siasi, riuscirà sempre difficile, e faticoso, dovendo necessariamente condurre ad un risultamento, che dee scindersi in due fattori; e questi fattori non posson dirsi estranei, dappoichè rispondono entrambi convenientemente alla quistione. Ma, generalmente parlando, noi manchiamo di norme per conoscere se un'equazione qualunque possa scindersi in altre più semplici; e se anche ne avessimo, vi vorrebbe un coraggio erculeo per seguirle sopra un'equazione di 243 termini, quanti ne risultano dallo sviluppo compiuto delle due relazioni (H), (I).

Usando talvolta de' particolari artifizj di analisi, che valgano a limitare la soluzione di un problema al caso preciso, che vuol considerarsi, può avvenire, che si eviti uno scoglio di tal natura: ma questi artifizj nè son da tutti, nè sempre si presentano; e l'analista in questi casi è il più delle volte costretto a desistere dall'impegno, se non voglia con prematuro giudizio incorrere in qualche erronea conchiusione. Così fu che il sig. Gergonne nel risolvere il problema di: *Trovare il luogo de' centri di tutte le sezioni coniche assoggettate a toccare due rette date di sito, e passare per due punti dati*, dall'essersi imbattuto in un'equazione di 4° grado a due variabili, che credè non potersi scindere in altre più semplici, conchiuse, che la locale di cui trattavasi non fosse nè una sezione conica, nè un sistema di due sezioni coniche: conchiusione, che l'illustre Poncelet riconobbe erronea, avendo impreso a risolvere lo stesso problema coll'ajuto della Geometria (*vegg. gli Annali v.XI, pag. 379*, e

lati VV''' , $V'V''$ *passano per due punti fissi* B , B', *il terzo* $V'''V'$ *sia parallelo a* BB' : *si cerca il luogo del punto* U *concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero* VV' ; si scorge facilmente , che questo problema non differisce dal primo, che per la sola circostanza che quì i due punti V''' , V'' non coincidono , mentre in quello si son supposti riuniti in un solo ; ma quantunque non coincidano pur tuttavolta essi hanno comune l' ascissa ; e però l' andamento di analisi per la soluzione di questi due problemi sarebbe in tutto identico ; e l' equazione risultante dev' essere per entrambi i casi la stessa ; cosicchè i due fattori (H) , (I) debbono a questi due casi corrispondere . Quindi all' un di essi si apparterrà la retta ; la curva all' altro. Ma qual sarà poi con ispecialità la locale per ciascun di essi ? Niuna regola diretta porgono i metodi analitici per conoscere in casi di tal natura a quali delle due linee convenga appi-

nel v. *XII.* ciò che al proposito è notato dal Poncelet). L' unico scampo in questi casi si quello di rivolgersi a considerazioni geometriche , le quali tendono naturalmente , come altrove il dicemmo, a ricondurre le soluzioni al senso preciso , che vogliamo attribuire alle quistioni ; e ciò valga a mostrare , che l' analista , senza profonda conoscenza dell' antica geometria , manca del più potente mezzo per riuscire con buon successo nelle ricerche , che imprende a trattare .

Molto si è lavorato per perfezionare i medodi di eliminazione , e specialmente per la ricerca dei fattori ; ma non v' ha dubbio , che l' analisi algebrica non molto per questa parte abbia progredito. L' esame, ed una severa analisi de' fattori , che si presentano ne' casi particolari potrebbe solo, nello stato attuale , spargere maggior luce su queste teorie, importantissime pe' metodi moderni , che sono di loro natura più subordinati al dominio dell' eliminazione .

gliarsi, secondo il senso preciso della quistione, e qual senso debba attribuirsele perchè sia soddisfatta dall' altra. La Geometria però ci mette in grado di conoscere prontamente, che pel secondo de' due problemi, tanto difficile ad esser trattato co' metodi algebrici, la locale sia una retta.

Infatti la VV' s' intenda prodotta finchè incontri in Q la BB'; poichè da' punti B, B' trovansi inflesse alla curva le BVV''', B'V'V'', e la congiungente di due delle sezioni V''', V'' è parallela a BB', la retta VV' che unisce le rimanenti sezioni V, V', dovrà pel teorema 2° incontrare la BB' in un dato punto Q. In conseguenza passando la VV' per un punto dato, il luogo de' punti U, concorsi delle tangenti in V, V' sarà una retta data di sito, polare di quel punto, e questa retta sarà in conseguenza quella rappresentata dalla relazione (I). Ond' è, che si ha il seguente

Teorema 5.°

Un quadrilatero variabile sia iscritto in una curva conica con tal legge che, mentre due dei suoi lati passano per due punti fissi, un' altro è parallelo alla congiungente de' punti istessi, il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà una retta data di sito (*).

(*) Questo teorema è conseguenza immediata del teorema 2°, dappoichè passando il lato libero per un punto fisso, il luogo del concorso delle tangenti nelle sue estremità l' è, com' è noto, una retta data di sito, polare del punto fisso; ma a prima vista non vedesi com' ei si comprenda nella relazione (I); nè per qual nesso ei sia legato al presente problema.

§. 21. Per costruir questa retta potranno inflettersi ad arbitrio due secanti BV''', B'V'' tali, che la V''V''' congiungente di due delle sezioni sia parallela a BB', e poscia protrarre la VV' finchè incontri la BB' in Q. La polare del punto Q sarà la retta cercata.

Ne' due punti, in cui questa retta incontra la curva, il punto U viene a confondersi co' punti V, V' riuniti in un solo; ma la V''V''' non cessa di esistere, e di essere parallela a BB'. Quindi questi due punti risolvono il medesimo problema risoluto in altre guise ne' §§.8, 9, e 15; ed è chiaro che la retta assegnata presentemente sia la stessa retta, che abbiamo allora costruita, e propriamente ne' §§. 8, e 9, con un procedimento del tutto diverso. Ed in fatti paragonando l' equazione di questa con l' equazione (H) del §. 8, esse si scorgeranno identiche, non differendo che nelle sole variabili.

§. 22. Discussa così la relazione (I), rimane ad esaminar la (H), che soddisfa al problema nel senso preciso com' è proposto. Facendo in essa per brevità

$$\frac{bb' - a(am + 2n)}{b - b'} = \beta \quad (^*) \qquad (K)$$

si ha

$$\beta^2\Big(u^2 - t(tm + 2n)\Big) = n^2(a - t)^2 \qquad (L)$$

Appartenendo quest' equazione alle linee di 2° ordine, avremo il seguente

(*) Può osservarsi fin da ora, che questa espressione altro non sia, che il valore dell' ordinata del *punto di conseguenza* rispetto a' dati punti B, b'; il che si vede, paragonandola con la (G) del §. 6.

Teorema 6°.

Se un triangolo variabile sia iscritto in una curva conica con tal legge, che due de'suoi lati passino costantemente per due punti dati, il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà una sezione conica.

Per la nota al §. 19 si avrà inoltre

Teorema 7.°

Se due vertici di un triangolo variabile circoscritto ad una sezione conica percorrano due rette date di sito, il vertice libero percorrerà un' altra sezione conica.

E per la teorica delle polari reciproche, che abbiamo esposta in altra memoria, si avrà di più:

Teorema 8.°

Se un triangolo variabile sia iscritto in una curva conica con tal legge, che due de' suoi lati passino per due punti fissi, il lato libero sarà continuamente tangente ad un altra sezione conica.

§. 23. Pria di procedere oltre faremo ancora qualche altra breve riflessione sulla soluzione, che abbiam recata al presente problema, la quale vedesi condotta a fine con grave stento, e difficoltà; non ostante che siesi ricorso a tutti que' ripieghi, che si riconoscono generalmente come i più efficaci a facilitare le eliminazioni tra le algebriche equazioni. In vero

trattasi di una quistione, che presenta a chi imprende ad occuparsene ostacoli indicibili, e forse, abbordata di fronte col metodo delle coordinate, farà spendere molto tempo in vano, se pur non induca ad erroneo concetto, cioè che la locale cercata sia di un ordine superiore al vero. Nè, speriamo, vorrà trovarsi esagerata siffatta proposizione, quando vogliano comprovarsi i calcoli precedenti, perchè si vedrà quanta pena, e quanto fastidio costi lo scindimento de' risultati nelle relazioni (II), (I). Tutte queste difficoltà possono però cessare, od almeno alleviarsi in gran parte, se nel risolvere il problema si ricorra a qualche opportuna geometrica considerazione.

Or ponendo mente alla natura della quistione, si riconosce che il teorema 1° possa grandemente influire a facilitarne la soluzione. Sappiam di fatti per esso, che se da una delle estremità del lato libero, per esempio da V *, si tiri la corda VV''' parallela a BB', debba la congiungente V'''V' incontrare la BB' in un dato punto D; e questa sola osservazione è già sufficiente per ricondurre la quistione a più trattabile problema, dappoichè invece di due punti B, B' permette di tener conto di un solo punto D. Osservando dunque che nel triangolo VV'V''' il lato V'V''' è assoggettato a passare pel punto dato D, l' altro VV''' ad esser parallelo a BB', ch' è una retta data di sito, e 'l terzo VV' non è che lo stesso lato libero del primo triangolo VV'V'', è chiaro che invece del triangolo variabile VV'V'' possiamo considerare l' altro triangolo variabile VV'V''' iscritto con tal condizione che un de' suoi lati sia assoggettato a passare per un dato punto, l' altro ad esser parallelo ad una retta data di sito. Quindi la quistione si riduce al seguente

* fig. 11.

Problema III.

§. 24. *Un triangolo variabile $VV'V'''$ sia iscritto in una curva conica con tal legge, che mentre un suo lato $V'V'''$ passa per un punto fisso D, l' altro VV''' si mantenga costantemente parallelo ad una retta data di sito: si cerca il luogo del punto U, concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero VV'.*

Si ritengano gli stessi assi del problema precedente, cioè la tangente OY parallela alla retta data di sito BB', e 'l diametro OX, che passa pel contatto. Si chiamino tuttavia z, v; z', v' le coordinate de' punti V, V'; saranno z, $-v$ le coordinate del punto V''': s' indichino inoltre con α, β le coordinate del dato punto D. Essendo

$$yu = x(tm+n)+tn$$

$$y+v = \frac{v'+v}{z'-z}(x-z)$$

le equazioni de' lati VV', V'V''' respettivamente, e passando quest' ultimo per D, cioè pel punto (α, β), si avrà

$$\beta+v = \frac{v'+v}{z'-z}(\alpha-z).$$

D' onde risulta

$$\alpha(v+v')+\beta(z-z')-v'z-z'v=o \qquad \text{(M)}$$

Colla prima delle precedenti equazioni si potranno poi determinare i valori di z, v; z', v' in funzioni delle coordinate del punto (t, u), come al §. 18; e sostituendoli in (M), si otterrà

$$2n'u\alpha + 2nut\beta - 2n'ut = o$$

ossia

$$\beta t = -n(\alpha - t)$$

e restituendo ad s il suo valore $\sqrt{\left(u^2 - (tm + 2n)\right)}$, si avrà

$$\beta^2\left(u^2 - t(tm + 2n)\right) = n^2 (s - t)^2 \qquad (L')$$

Cioè la stessa equazione (L) rilevata per altra via, essendo facile a riconoscere, che l' α, e β in questa non sieno, che l' a, e β di quella, mentre l' espressione $\dfrac{bb' - a(ma + 2n)}{b - b'}$ a cui per brevità si è fatta nel §. 22 uguale la β, altro non è che l' espressione dell' ordinata appartenente al *punto di conseguenza* tra i due punti (a, b), (a, b'), e ch' è perciò la stessa β del presente problema.

Ed ecco in qual modo una semplice geometrica considerazione è stata valevole a far scomparire con tutto il treno del calcolo richiesto per la prima soluzione di questo problema, tutta la sua difficoltà. La ragione n' è poi evidente; dappoichè, prescindendo dall' essersi quì ristretto il numero de'dati, vi ha di più, che non potendo attualmente aver luogo il caso, cui rispondeva il fattore incontrato nella prima soluzione, quel fattore or non dovea figurare. Ma quantunque quest' ultima soluzione sia di gran lunga più semplice dell' altra, pur tuttavolta essa anche più semplice e piana può rendersi, ricorrendo a qualche altra geometrica considerazione, come or ci faremo a dimostrare.

§. 25. Ritenendo sempre gli assi medesimi, e le stesse segnature si osservi, che compiendo il quadrilatero a lati paralleli VV'''V'v, i suoi lati convergenti, e le diagonali debbono incontrarsi respettivamente in due punti T, S, situati sul diametro OX, e che debba di più la UT essere la polare del

punto S, e quindi parallela ad OY (*). Ciò posto essendo

$$y-\beta=\frac{\beta+\nu}{\alpha-z}(x-\alpha)$$

l' equazione del lato, che passa per D, si avrà pel punto T

$$-\beta=\frac{\beta+\nu}{\alpha-z}(t-\alpha);$$

d' onde

$$\frac{\nu(\alpha-t)}{\beta}=t-z. \qquad (N)$$

Di più l' equazione della tangente nel punto V, essendo

$$vy=x(zm+n)+nz,$$

nel punto U si avrà

$$vu=t(zm+n)+nz. \qquad (O)$$

E finalmente avendosi

$$v^2=mz^2+2nz \qquad (P)$$

non rimane che ad eliminare le z, v tra le equazioni (N), (O), (P): operazione agevole ad eseguirsi, e che potrà condursi nel seguente modo.

Si elevino a quadrato le (N), (O), e dopo aver moltiplicato il primo prodotto per n^2, si sottragga l' un dall' altro. Il residuo

$$v^2\left(u^2-\frac{n^2(\alpha-t)^2}{\beta^2}\right)=t(tm+2n)(mz^2+2nz)$$

(*) Queste verità sono notissime, e comuni, e trovansi da noi benanche esposte tra diversi teoremi sulle sezioni coniche pubblicati con altro opuscolo.

per la (P) diverrà

$$v^2\left(u^2 - \frac{n^2(a-t)^2}{\beta^2}\right) = t(tm + 2n)v^2$$

cioè

$$u^2 - \frac{n^2(a-t)^2}{\beta^2} = t(tm + 2n)$$

donde risulta

$$\beta^2\left(u^2 - t(tm + 2n)\right) = n^2(a-t)^2 \qquad (L'')$$

ch' è la stessa eqnazione rilevata più sopra per due altri diversi procedimenti. E se riflettasi, che presentemente non si è avuto bisogno di ricorrere alle espressioni assegnate nel §. 18, per le coordinate de' punti di contatto in funzione di quelle del punto di concorso delle tangenti, si riconoscerà, che quest' ultima soluzione, ridotta ormai ad intuizione, superi di gran lunga le altre due per semplicità, e per chiarezza.

Ma non sono queste le sole vie che la Geometria ne addita, per facilitare la soluzione del problema di cui ci siamo occupati, a chi sia in essa convenevolmente esercitato, e sappia apprezzarla. Ma ben altre ancora ne offre; e, nel caso presente, pur semplicissime e piane. Di fatti chi non vede, che anche ora potrebbesi utilmente applicare il teorema accennato al §. 10? Noi ci dispensiamo da questo assunto per non essere infiniti; ed invece passeremo ad esporre una elegante soluzione di questo problema, condotta per le pure vie dell' analisi moderna, e che sorge da quanto abbiamo osservato ne' §§. 11 e 12.

§. 26. Ripiglieremo a tal' effetto le equazioni (E), (F) del §. 19, cioè le

$$\left.\begin{aligned} v'' - b &= \frac{b - v}{a - z}\,(z'' - a) \\ v'' - b' &= \frac{b' - v'}{a - z'}\,(z'' - a) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= mz^2 + 2nz \\ v'^2 &= mz'^2 + 2nz' \\ v''^2 &= mz''^2 + 2nz'' \end{aligned}\right\}$$

Sviluppando le prime due , si ha

$$\left.\begin{aligned} a(\,v'' - v\,) - b\,(\,z'' - z\,) - v''z + v\,z'' &= o \\ a(\,v'' - v'\,) - b'(\,z'' - z'\,) - v''z' + v'z'' &= o \end{aligned}\right\} \quad (Q)$$

e le altre tre , facendo

$$\frac{z}{v} = r \;,\quad \frac{z'}{v'} = r' \;,\quad \frac{z''}{v''} = r''$$

daranno

$$z = 2n\,\frac{r^2}{1 - mr^2} \;,\quad z' = 2n\,\frac{r'^2}{1 - mr'^2} \;,\quad z'' = 2n\,\frac{r''^2}{1 - mr''^2}$$

$$v = 2n\,\frac{r}{1 - mr^2} \;,\quad v' = 2n\,\frac{r'}{1 - mr'^2} \;,\quad v'' = 2n\,\frac{r''}{1 - mr''^2}$$

Sostituendo queste espressioni nelle (Q) , si troverà

$$a\,(\,1 + mrr''\,) - b\,(\,r + r''\,) + 2nrr'' = o$$
$$a\,(\,1 + mr'r''\,) - b'\,(\,r' + r''\,) + 2nr'r'' = o$$

Eliminando tra queste due equazioni la r'' si avrà quindi

$$\frac{(am + 2n)\,rr' - a}{r - r'} = \frac{bb' - a\,(am + 2n)}{b - b'}$$

ovvero , facendo per brevità $\frac{bb' - a(\,am + 2n\,)}{b - b'} = \beta$ (*),

---

(*) Si osservi anche ora che l'espressione $\frac{bb' - a\,(am + 2n)}{b - b'}$ non è che l'ordinata del *punto di conseguenza* tra B , B'.

$$(am + 2n)\, rr' - a = \beta (r - r').$$

Potranno ora restituirsi ad r, r' i rispettivi valori $\frac{z}{v}$, $\frac{z'}{v'}$, e si otterrà così

$$(am + 2n)\, zz' - avv' = \beta (zv' - z'v)$$

Questo risultamento per le espressioni del §. 18 diverrà poi

$$\beta s = - n (a - t);$$

donde si avrà di bel nuovo come nel §. precedente

$$\beta^2 \Big(u^2 - t (tm + 2n) \Big) = n^2 (a - t)^2 \qquad (L''')$$

Vale a dire la stessa che le equazioni (L), (L′), (L″) rilevate per altre vie, essendo superfluo di ripetere, che qui l' a, e β sieno identiche alle α, β delle altre.

§. 27. Per compiere in tutte le sue parti l'esame del problema, che ci ha occupati, ne rimane a rilevare il corso, e le affezioni della curva locale a riguardo della curva proposta, o per meglio dire ne resta a compiere la discussione della sua equazione. E qui saremo alquanto minuti non solo perchè troviamo qualche discordanza co' risultamenti accennati dall' illustre Poncelet, ma anche perchè sul caso del triangolo è fondata l' assegnazione della locale per un poligono qualunque, come si vedrà più appresso.

A tal' effetto svilupperemo l' equazione della locale, la quale ordinata diverrà

$$\beta^2 u^2 - (m\beta^2 + n^2)\, t^2 - 2nt (\beta^2 - an) - n^2 x^2 = o \quad (R)$$

E dalla ispezione di questo risultamento rilevasi:

I° Che il centro della locale sia sull' asse OX.

II° Che il suo diametro conjugato a quello, che si distende su questo asse, sia parallelo all' asse OY, ossia a CQ conjugato ad OC nella curva data (*).

III° Che la locale sia *iperbole*, *ellisse*, o *parabola*, secondochè la quantità $m\beta^2 + n^2$ sia *positiva*, *negativa*, o *zero*. E dipendendo questa circostanza dal segno di m, ne segue, che se la curva data è *iperbole*, essendo m positiva, la locale sarà *iperbole* (*fig. 20. 21*). Se poi la curva data è *ellisse*, essendo m negativa, la locale potrà essere *iperbole* (*fig. 12. 16. 17*), *ellisse* (*fig. 13. 15*), o *parabola* (*fig. 14*), secondo che β sia $<, >, = \sqrt{-\frac{n^2}{m}}$ (**), cioè, che DA sia minore, maggiore, o eguale a CQ semidiametro conjugato a CO. E finalmente quando sia $m = o$, cioè quando la curva data è *parabola*, risultando negativo il coefficiente di t^2, la locale sarà *iperbole* (*fig. 18*, *e 19*).

IV. Per vedere se la locale incontra l' asse OX faremo $u=o$, e risolvendo la equazione, che risulta

$$(m\beta^2 + n^2)\, t^2 + 2nt\,(\beta^2 - \alpha n) + n^2\alpha^2 = o,$$

si avrà

$$t = \frac{-n(\beta^2 - \alpha n) \pm n\beta\sqrt{\left(\beta^2 - \alpha(\alpha m + 2n)\right)}}{m\beta^2 + n^2}$$

(*). Ciò è chiaro, mancando nell' equazione (R) il termine in ut.

(**) Rammentiamo, che l' espressione $\sqrt{-\frac{n^2}{m}}$ equivale in grandezza al semidiametro conjugato a quello che nella curva dell' equazione $y^2 = mx^2 + 2nx$ si distende sull' asse delle x.

espressione, in cui conviene all' oggetto esaminare se il radicale sia reale o immaginario. Ora è chiaro, che la quantità $\alpha(\alpha m + 2n)$ rappresenti il quadrato dell' ordinata, che nella data curva corrisponde all' ascissa α; vale a dire è $\alpha(\alpha m+2n) = \mathrm{HA}^2$ (*fig.* 15, 16, 17, 19, 20); e perciò essendo $\beta^2=\mathrm{DA}^2$, se il punto D cade dentro della curva (*fig.* 17, 19, 20), dovendo necessariamente risultare $\mathrm{DA}^2 < \mathrm{HA}^2$, sarà pure $\beta^2 < \alpha(\alpha m + 2n)$, e quindi il radicale sarà immaginario. In questo caso adunque la locale non potrà incontrare l' asse delle ascisse, ed i suoi rami saranno rivolti nel senso dell' asse OY.

Se poi il punto D cade fuori della curva il radicale sarà sempre reale. Ciò è chiaro se DA interseca la curva (*fig.* 15, 16), mentre si ha sempre in questo caso $\mathrm{DA}^2 > \mathrm{HA}^2$, e quindi $\beta^2 > \alpha(\alpha m + 2n)$. Ma se DA cade fuori della curva (*fig.* 12. 13, 14, 18, 21), questa verità si rileverà meglio dando ad m, ed n i loro valori effettivi. A tal' uopo si chiamino p, q i semidiametri CO, CQ; per l' ellisse si avrà $m = -\frac{q^2}{p^2}$, $n = \frac{q^2}{p}$; e per l' iperbole $m = \frac{q^2}{p^2}$, $n = -\frac{q^2}{p}$

Laonde il radicale diverrà

per l' ellisse $$\sqrt{\left(\beta^2-\alpha\frac{q^2}{p^2}(2p-\alpha)\right)} \qquad \text{(B)}$$

e per l' iperbole $$\sqrt{\left(\beta^2+\alpha\frac{q^2}{p^2}(2p-\alpha)\right)} \qquad \text{(C)}$$

Or se DA, come il richiede l' attuale supposizione, non interseca la curva, il binomio $(2p - \alpha)$ sarà per l' ellisse una quantità negativa, quando α sia positiva; e perciò in questo caso la quantità compresa dal radicale (B) sarà positiva. Che se α sia

negativa, quella quantità divenendo $\beta^2 + \alpha \frac{q^2}{p^2} (2p + \alpha)$, sarà pure positiva. Per l' [illegible]erbole poi, se α è positiva, il binomio $(2p - \alpha)$ sarà quantità positiva; e perciò positiva la quantità compresa dal radicale (T); ed ove α sia negativa, la DA ritornerà ad intersecar la curva.

Pel caso della parabola, essendo $m = o$, il radicale riducesi a $\sqrt{(\beta^2 - 2\alpha n)}$, che, per α negativa, diviene $\sqrt{(\beta^2 + 2\alpha n)}$, evidentemente reale.

Dopo ciò può conchiudersi, che se il punto D cade al di fuori della curva la locale incontrerà l' asse delle ascisse, ed i suoi rami seguiranno la direzione di questo asse; e se D cade al di dentro della curva, la locale, non potendo incontrare l' asse OX, avrà i suoi rami rivolti nel senso dell' asse OY.

V°. Per iscorgere se la data curva, e la locale s'incontrino, ed in quali punti, giova considerare l' equazione della locale sotto la forma

$$u^2 - t(tm + 2n) = \frac{n^2}{\beta^2}(\alpha - t)^2$$

dappoichè presentando il primo membro un' equazione pariforme a quella della curva data, mostra, che per ogni punto, che sia comune alle due curve, il secondo membro di questa equazione debba esser *zero*. Ma questo secondo membro può diventar *zero* nel solo caso di $t = \alpha$; dunque alla sola ascissa del punto D possono corrispondere intersezioni della curva colla locale; ed in conseguenza due intersezioni tutt' al più potranno aver luogo. Inoltre risultando da esso 2° membro, in qualunque altro caso, una quantità sempre positiva, sia che si abbia $\alpha > t$, sia che si abbia $\alpha < t$, è chiaro che ad ogni altra ascissa di-

versa da α debba corrispondere nella locale un'ordinata sempre maggiore della corrispondente ordinata nella data curva. Vale a dire, che all'infuori di quelle due intersezioni (se pure han luogo), ogni altro punto della locale starà fuori della curva. Che perciò quelle due intersezioni saran due contatti. Or tre casi posson darsi. 1°. Che l'ordinata DA cada fuori della curva, e quindi non la incontri affatto. 2°. Che l'incontri, o per dir meglio la tocchi in un sol punto; il che avviene quando la DA si distende sull'asse OY. 3°. Finalmente che DA cada dentro della curva, incontrandola per conseguenza in due punti. Nel 1° caso dunque la locale, e la curva non potranno toccarsi affatto (*fig.* 12, 13, 14, 18, 21); nel 2° si toccheranno nel solo punto O (*fig.* 22) (*); e nel 3° si toccheranno in due punti, cioè ne' punti H, H' (*fig.* 15, 16, 17, 19, 20). Intanto poichè la direzione di DA è la stessa della congiungente de' punti B, B', potremo generalmente conchiudere, che: *la locale, e la curva data si toccheranno in due punti, in uno, o non si toccheranno affatto, secondochè la congiungente de' dati punti B, B' interseca, tocca, o cade al di fuori della data curva.*

Essendo dunque, come vedesi ad evidenza, del tutto accidentale, e non necessaria la circostanza de' due contatti tra la proposta curva, e la locale, non sappiamo intendere come l'illustre

---

(*) In questo caso avendosi $\alpha = o$, l'equazione sarà priva dell'ultimo termine $\alpha' n'$; ed è noto, che, quando ciò si verifica, la curva, cui questa equazione si appartiene, tocca l'asse delle ordinate nell'origine delle ascisse.

Poncelet, abbia potuto così conchiudere . . . *une autre section conique*, *touchant la primiere* (cioè la data curva) *en deux points*; e ciò ripetendosi formalmente ne' due teoremi, che abbiamo fin da principio accennati, ne induce a credere che siffatta circostanza di contatti siesi ritenuta come essenziale, e necessaria tra la data curva, e la locale; dappoichè non vedesi altra ragione, che avesse potuto indurre a soggiugnerla a' due teoremi, i quali reggon benissimo senza di essa; ma non conoscendo de' lavori di questo distinto geometra su tal proposito, che la sola enunciazione de' due cennati teoremi, null' altro possiamo affermarne. Intanto passeremo ad assegnare i determinanti per la descrizione effettiva della locale.

§. 28. Suppongasi, in primo luogo, che si abbia $m = o$, cioè che la curva data sia parabola (*fig. 18*, *19*); in tal caso l' equazione (R) riducendosi a

$$\beta^2u^2 - n^2t^2 - 2nt(\beta^2 - \alpha n) - \alpha^2n^2 = o \qquad \text{(U)}$$

dinota un' iperbole, il cui centro è dato dall' ascissa

$$x = -\frac{\beta^2 - \alpha n}{n}$$

la quale si costruisce tirando dal punto D la Dc parallela alla sua polare pp; mentre questa avendo per equazione

$$y = \frac{n}{\beta}(x + \alpha) \qquad \text{(V)}$$

quella della Dc ad essa parallela, sarà

$$y - \beta = \frac{n}{\beta}(x - \alpha)$$

che, per $y = o$, dà

$$x = Oc = -\frac{\beta^2 - \alpha n}{n}$$

Sarà dunque c il centro dell' iperbole. Inoltre i suoi assintoti essendo paralleli alle rette delle equazioni

$$\beta u - nt = o$$
$$\beta u + nt = o$$

il cui prodotto equivale ai primi due termini di (U), saranno paralleli il primo alla (V), polare del punto D, cioè del punto (α, β), l' altro alla polare del punto espresso da $(\alpha, -\beta)$. Vale a dire un assintoto sarà la stessa Dc; e presa Ad = AD, sarà, com' è chiaro, cd l' altro assintoto. Assegnato il centro, e gli assintoti dell' iperbole, rimane a trovarne un punto. A tal' effetto pongasi $t = o$ nella equazione (U), si avrà

$$u = \pm \frac{n\alpha}{\beta} \qquad (*)$$

e questa espressione indicando il valore, che acquista l' y nella (V), polare di D, quando vi si fa $x = o$, mostra che il punto N, in cui la pp incontra l' asse OY, sia un punto della locale. E si avrà perciò la seguente

Composizione.

fig. 18. Segnata la tangente OY parallela a BB', il diametro AO, e la ppN polare di D, si tagli Ad eguale ad AD. Indi condotta Dc parallela a pp, si unisca cd.

L' iperbole tra gl' assintoti cD, cd, e che passa per N, sarà la locale cercata.

(*) Il doppio segno mostra, che prendendo sull' asse OY la ON' = ON, anche il punto N' appartenga alla locale.

§. 29. Se il punto D cade dentro della parabola *, non vi è bisogno di rilevare il punto N; dappoichè la locale, per ciò, che si è detto nel n°. V, passa pe' punti H, H', ove dippiù tocca la parabola data: ma è da notarsi, che in questo caso l' iperbole cade dentro l' angolo DcD', dovendo i suoi rami essere rivolti nel senso dell' asse delle ordinate, come si è rilevato nel n°. IV.

* *fig. 19.*

§. 30. Se nella equazione (U) si faccia $u = o$, le radici della risultante equazione

$$n^2t^2 + 2nt(\beta^2 - \alpha n) + \alpha^2 n^2 = o \qquad (X)$$

corrisponderanno alle ascisse de' punti S, S' *, vertici di quel diametro della locale, che si distende sull' asse OX, e saranno costruite dalle tangenti DpS, DpS' condotte alla parabola dal punto D; e ciò si osserva chiaramente mettendo questa equazione sotto la forma

* *fig. 18.*

$$n^2(\alpha - t)^2 = -2nt\beta^2 \qquad (Y)$$

dappoichè, chiamando x', y' le coordinate del punto, in cui una di queste tangenti incontra la curva, e t' l' ascissa, che taglia sull' asse OX, la sua equazione essendo

$$yy' = n(x + x') \qquad (Z)$$

nel punto D, si avrà

$$\beta y' = n(\alpha + x')$$

donde

$$\beta^2 y'^2 = n^2(\alpha + x')^2$$

ossia

$$2nx'\beta^2 = n^2(\alpha + x')^2$$

Inoltre nel punto in cui la tangente (Z) incontra l' asse OX, avendosi

$$x = -x' = t'$$

l' ultima equazione diverrà

$$-2nt'\beta^2 = n^2(\alpha - t')^2$$

Questa equazione, e la (Y) non differendo che nelle sole incognite, debbono avere le stesse radici; e perciò essendo OS, OS′ le radici dell' una, lo saranno anche dell' altra; cioè a dire, che i punti S, S′ segnati dalle due tangenti Dp sull'asse OX, corrispondono a' vertici di quel diametro della locale, che si distende sull' asse medesimo. Potendo dunque i vertici S, S′ di questo diametro facilmente assegnarsi, quando il punto D cade fuori della curva, rilevasi ancora per questo caso la seguente altra

Composizione.

fig. 18. Tirate da D le tangenti DpS, DpS′, e la ppN, si rinvenga OF terza proporzionale dopo OS, ON; e congiunta S′F, si conduca SE parallela ad OF.

L' iperbole descritta col lato trasverso SS′, e col parametro ES, che la tocchi in S, sarà la locale cercata.

§. 31. La composizione riportata più innanzi al §. 28 è alquanto più semplice di quella, che abbiamo ora recata; ma questa è identicamente la stessa, se invece della parabola sia data qualunque altra curva a centro, sempre però che il punto D cada al di fuori di quest' ultima curva (*fig. 12, 13, 15, 16, 21.*). Ed invero trattando l' equazione (R) come la (X) nel §. 30, si vedrà, che i vertici di quel diametro della locale, che distendesi sull'asse OX, corrispondono sempre a' punti S, S′ segnati su di esso dalle due tan-

genti Dp ; inoltre facendovi $t = o$, si ha

$$u = \frac{n\alpha}{\beta}$$

e vedesi , che questa espressione sia benanche il valore , che acquista l' y nell' equazione della polare di D , espressa da

$$\beta y = x(\alpha m + n) + \alpha n \qquad (a)$$

quando si fa $x = o$; perciò anche in questo caso il punto N , in cui la pp incontra l' asse OY , è un punto della curva . Laonde , qualunque sia la curva data , purchè il punto D cada al di fuori di essa , avrassi la seguente

Composizione

Trovata OF terza proporzionale dopo OS, ON, si congiunga * S'F , e conducasi SE parallela ad OF . Sarà SS' il lato trasverso della locale , ed SE , tangente in S , ne sarà il parametro .

* *fig. 13.*

Questa locale poi , per ciò che si è detto nel n.° III sarà iperbole , o ellisse a misura che sia DA minore , o maggiore di CQ , se la data curva è ellisse ; ed iperbole , se la curva data sia iperbole . Che se DA sia eguale a CQ * , svanendo il punto S' , la locale sarà parabola ; ed in tal caso la FE risulterà parallela ad OS.

* *fig. 14.*

§. 32. Questa composizione non regge se il punto D cade dentro della data curva ; ma in tal caso si rifletta , che dovendo esser toccata dalla locale ne' punti H , H' (*fig. 17, 20*),

come si è veduto nel n.° V, queste due curve avranno ivi comuni le tangenti HR , H′R . Quindi essendo sempre N un punto della locale, sarà sufficiente un'altro punto per poterla descrivere . Per trovarlo nell'equazione (R) pongasi $t = -\frac{2n}{m}$; siffatta posizione la ridurrà ad

$$u^2 = \frac{n^2(\alpha m + 2n)^2}{\beta^2 m^2}$$

donde

$$u = \frac{n(\alpha m + 2n)}{\beta m}$$

espressione equivalente al valore dell' y nella (a) polare di (D) pel caso di $x = -\frac{2n}{m} = OO'$. In conseguenza il punto M , in cui la pp incontra la tangente O′M è un altro punto della locale . Quindi si avrà la seguente

COMPOSIZIONE.

* *fig. 17.* Si segni la pp polare di D , che incontri in N , M le due tangenti tirate alla data curva parallele a BB′ , e si applichi al punto H la tangente HR .

L'iperbole , che passando per N , M, tocca in H la HR , sarà la locale cercata .

§. 33. Se vogliasi il centro della locale esso sarà dato dall' ascissa

$$x = -n\,\frac{\beta^2 - \alpha n}{m\beta^2 + n^2}$$

Per costruirla porremo questa espressione sotto la forma

$$x\frac{m\beta^2+n^2}{n\beta}=\frac{nx}{\beta}-\beta$$

ed or si vede, che questa x sia l' ascissa del punto d' incontro di due rette date per le equazioni

$$y-\beta=\frac{m\beta^2+n^2}{n\beta}x \qquad (b)$$

$$y=\frac{nx}{\beta} \qquad (c)$$

A costruire la prima di queste rette, si ponga nella sua equazione $x=o$, e risultando $y=\beta$, si ravvisa, ch' essa taglia sull' asse OY la parte $OT=\beta=AD$; che però T ne sarà un punto: e per trovarne un' altro si faccia $x=-\frac{n}{m}$; risulterà così

fig. 17.

$$y=-\frac{n^2}{m\beta}$$

che dinota il valore di y nella (a), polare di D, pel caso di $x=-\frac{n}{m}$. Segue da ciò, che il punto K, in cui la pp incontra CQ, semidiametro conjugato ad OC, sia un altro punto della retta (b), la quale sarà perciò rappresentata dalla KT. La (c) indica poi evidentemente la parallela condotta per N ad OX. Adunque per assegnare il centro si taglierà $OT=AD$, si congiungerà TK, e condotta NG parallela ad OX; si porterà la NG da O in e; sarà e il centro della locale (*).

(*) Il centro della locale può più facilmente assegnarsi quando il punto D cade al di fuori della curva, dappoichè esso trovasi in que-

fig. 12. §. 34. Se, dopo aver ottenuto il centro, si volessero assegnare gli assintoti della locale, ove ne abbia, il che ne facilita la descrizione, basterà ricercare in quai casi le tangenti nelle estremità del lato libero del triangolo VV'V''' possono divenir parallele, dappoichè gli assintoti saranno appunto a queste tangenti paralleli (*). Or egli è chiaro, che, per la circostanza suddetta, sia necessario, che il lato libero VV' prenda tal sito, da risultar diametro della curva; ed è poi manifesto aver ciò luogo quando il lato V'V''' assoggettato a passare pel dato punto D, sia parallelo ad OX.

Tirata adunque la secante DV'V''' parallela ad OX, uno degli assintoti sarà parallelo alla tangente in V'. E poichè condotta la corda V'v parallela a VV''', risulta il triangolo vV'V''' fornito delle stesse condizioni del triangolo VV'V''', l'altro assintoto sarà parallelo alla tangente in V'''. Che se la parallela condotta pel punto D ad OX non interseca la curva, gli assintoti non avranno luogo, e la locale sarà ellisse, come è stato già diversamente rilevato al §. 27 n.° III. E quante volte l'incontrasse in un sol punto, toccandola (*fig. 14*), la locale sarà parabola.

---

sto caso, come ben si comprende, nel punto medio della SS', (*fig. 12. 13. 15. 16, 18, 21.*), ch'è la porzione interposta sul diametro OO' tra le due tangenti Dp. Ma se il punto D esista dentro della curva (*fig. 17.*), mancando le tangenti, il centro della locale non può egualmente ottenersi, e converrà allora assegnarlo come si è qui sopra indicato.

(*) Si vegga nella nostra memoria sulle *polari coniche reciproche* la norma data per assegnare gli assintoti dell'iperbole.

§. 35. Avendo compiutamente esaminata la natura, il corso, e le affezioni della locale, di cui ci siamo occupati, relative alla curva proposta, conviene che si noti un caso, che merita particolare attenzione, ed è quando si abbia $\beta = o$, o che val lo stesso, quando il punto D cada in A. In tal caso la (R) si

ridurrà ad $\qquad \alpha^2 (t^2 + \alpha^2 - 2\alpha t) = o$

ossia a $\qquad (t - \alpha)^2 = o$

d'onde $\qquad t = \alpha$.

Vale a dire, che in tal caso la locale finisce di essere una curva, e si riduce ad una retta, ch' è la stessa BB'. Ma quando si ha $\beta = o$, si è visto al §. 6., che i due punti B, B' son tali, che la polare dell' uno passa per l' altro; potrà dunque da ciò ricavarsi il seguente

TEOREMA 9.°

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica circolino costantemente intorno a due punti tali, che la polare dell' uno passi per l' altro; il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà la congiungente de' punti medesimi.

§. 36. Essendo inoltre evidente, che debba in questo caso il lato libero passare anch' esso per un dato punto, polo di quella congiungente, si avrà l' altro

Teorema 10.°

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica circolino costantemente intorno a due punti tali, che la polare dell' uno passi per l' altro; il lato libero passerà anch' esso per un dato punto, polo della congiungente de' due punti dati.

§. 37. Se si proponesse d' iscrivere un triangolo, i cui lati passar dovessero per tre punti cosiffattamente condizionati, il problema sarebbe evidentemente indeterminato; il che fu rilevato la prima volta sul cerchio dall' egregio prof. Scorza, nella soluzione da lui data di questo problema fin da' tempi della pubblicazione degli *Opuscoli della scuola del Fergola*, seguita nel 1810.

Assoluta la ricerca pel caso del triangolo, passeremo ad occuparci della quistione generale, proponendoci il seguente

Problema IV.

fig. 23. §. 38. *Un poligono variabile sia iscritto in una curva conica con tal legge, che tutt' i suoi lati, all' infuori di un solo, passino per punti dati; si cerca il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero.*

Suppongasi, per poco, che il poligono sia un quadrilatero, e rappresentandolo con VV'V''V''', siane VV' il lato libero, e gli altri tre lati VV''', V'''V'', V''V' passino respettivamente pe' dati punti B, B', B''. Ciò posto, si prendan per assi qualunque diametro, e la tangente al suo vertice, talchè la curva possa essere rappresentata, come per lo innanzi, dall' equa-

zione generale $$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad \text{(A)}$$
e si assumano le seguenti indicazioni

Pe' punti $\begin{cases} B\,(a\;,b\;) \\ B'(a'\;,b'\;) \\ B''(a''\;,b''\;) \end{cases}$ *Pe' vertici* $\begin{cases} V\;(z\;,v\;) \\ V'\;(z'\;,v'\;) \\ V''\;(z''\;,v''\;) \\ V'''(z'''\;,v''') \end{cases}$,

Finalmente il punto di concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero VV′ sia dinotato con (t, u); l' equazione di questo lato sarà per tal modo

$$yu = x\,(tm + n) + tn \qquad \text{(B)}$$

e quelle degli altri lati VV‴, V‴V″, V″V′ saranno

$$y - v = \frac{v - v'''}{z - z'''}\,(x - z)$$

$$y - v''' = \frac{v''' - v''}{z''' - z''}\,(x - z''')$$

$$y - v'' = \frac{v'' - v'}{z'' - z'}\,(x - z'')$$

Passando dunque questi lati per B, B′, B″ si avranno dalle loro equazioni le seguenti

$$\left.\begin{array}{l} b\,(z - z''') - a\,(v - v''') = z\,v''' - v\,z''' \\ b'(z''' - z'') - a'\,(v''' - v'') = z'''v'' - v'''z'' \\ b''(z'' - z') - a''\,(v'' - v') = z''v' - v''z' \end{array}\right\} \quad \text{(C)}$$

Or pongasi

$$\left.\begin{array}{ll} v = rz \;, & v'' = r''z'' \\ v' = r'z' \;; & v''' = r'''z''' \end{array}\right\} \quad \text{(D)}$$

e come che regge per (A) l' equazione

$$v^2 = mz^2 + 2nz$$

combinandola con $v = rz$, si avrà

$$z = \frac{2n}{r^2 - m} \quad , \quad v = \frac{2nr}{r^2 - m}$$

e similmente si rileverebbe

$$z' = \frac{2n}{r'^2 - m} \quad , \quad v' = \frac{2nr'}{r'^2 - m}$$

$$z'' = \frac{2n}{r''^2 - m} \quad , \quad v'' = \frac{2nr''}{r''^2 - m}$$

$$z''' = \frac{2n}{r'''^2 - m} \quad , \quad v''' = \frac{2nr'''}{r'''^2 - m}$$

Colla sostituzione di questi valori nelle tre equazioni (C), esse diverranno, dopo le convenevoli riduzioni,

$$\left.\begin{aligned} b\,(r + r''') - a\,(m + rr''') &= 2n \\ b'(r''' + r'') - a'(m + r'''r'') &= 2n \\ b''(r'' + r') - a''(m + r''r') &= 2n \end{aligned}\right\} \quad \text{(E)}$$

Intanto si osservi, che se vi fossero più lati, e più punti dati, si avrebbero altrettante equazioni, tutte della stessa forma delle precedenti, val quanto dire ciascuna contenente due sole indeterminate a primo grado. Quindi qualunque sia il numero di queste equazioni, e però qualunque il numero de' lati del poligono, l' eliminata nelle sole indeterminate r, r', che corrispondono alle estremità del lato libero, dovrà sempre risultar della forma

$$Arr' + Br + Cr' + D = 0 \qquad \text{(F)}$$

E poichè si ha $r = \frac{v}{z}$, $r' = \frac{v'}{z'}$, l' ultima equazione diverrà

$$Avv' + Bvz' + Cv'z + Dzz' = o \qquad (G)$$

Or dalle espressioni delle coordinate de' punti di contatto in funzione delle coordinate del punto di concorso delle tangenti , rilevate al §. 18 , deducendosi

$$vv' = \frac{n^2t(\,tm + 2n\,)}{q^2 - mu^2} \quad , \quad zz' = \frac{n^2t^2}{q^2 - mu^2}$$

$$vz' = \frac{n^2t(\,u - s\,)}{q^2 - mu^2} \quad , \quad v'z = \frac{n^2t(\,u + s\,)}{q^2 - mu^2}$$

sostituendo queste espressioni nella equazione (G), tolto il fattor comune $\frac{n^2t}{q^2 - mu^2}$, essa si ridurrà ad

$$A(tm + 2n) + Dt + u(B + C) = s(\,B - C\,)$$

e restituendo ad s il suo valore si avrà in fine

$$\Big(A(tm+2n)+Dt+u(B+C)\Big)^2 = \Big(u^2 - t(tm + 2n)\Big)(B-C)^2 \qquad (H)$$

equazione ad una linea del 2.° ordine ; da che risulta il seguente

Teorema 11.°

Se tutt' i lati di un poligono variabile iscritto in una curva conica circolino , all' infuori di uno , intorno a punti dati ; il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà un' altra curva conica .

Dalla nota del §. 19. si dedurrà poi l'altro

TEOREMA 12.°.

Se tutt' i vertici di un poligono variabile circoscritto ad una curva conica percorrano, all' infuori di un solo, rette date di sito; il vertice libero percorrerà anch' esso un' altra curva conica.

E per la teorica delle polari reciproche si avrà finalmente

TEOREMA 13.°

Se tutt' i lati di un poligono variabile iscritto in una curva conica circolino, all' infuori di uno, intorno a' punti dati; il lato libero sarà nel suo movimento continuamente tangente ad un' altra curva conica.

§. 39. Che se i punti dati sieno per dritto, prendendo per asse delle y la tangente parallela alla linea su cui si trovano questi punti, essi avranno comune l' ascissa, e le equazioni (E) diverranno in conseguenza

$$b\ (r\ \ +r''') - arr''' = am + 2n$$
$$b'\ (r'''+r'') - ar'''r'' = am + 2n$$
$$b''\ (r''\ +r'\ ) - ar''r' = am + 2n$$

ed altre equazioni di simil forma si avrebbero se i punti dati fossero in numero maggiore. Per tanto, ove si tratti del quadrilatero, converrà rilevare l' eliminata in r, r' dalle tre se-

praddette equazioni, ed effettuando il calcolo, si troverà, scrivendo per brevità p in luogo di $(am + 2n)$,

$$\left.\begin{aligned} &+ (bb' - bb'' - b'b'' - pa)\, arr' \\ &+ (pab - pab' + pab'' - bb'b'')\, r \\ &+ (pab - pab' + pab'' - bb'b'')\, r' \\ &+ (bb' - bb'' + b'b'' - pa)\, p \end{aligned}\right\} = o$$

equazione, che, come vedesi, può ridursi alla forma

$$Aarr' + Br + Br' + Ap = o$$

Paragonando i coefficienti dei termini di quest' ultima equazione con quelli della (F), risulterà

$$A = Aa\ ,\quad B = C\ ,\quad D = Ap$$

Quindi l' equazione (H) si trasformerà nell' altra

$$Aa\,(tm + 2n) + pAt + 2Bu = o$$

ovvero, restituendo a p il suo valore $(am + 2n)$, in questa

$$Aa\,(tm + 2n) + At\,(am + 2n) + 2Bu = o \qquad (I)$$

ch' è ad una retta. E perciò: *se tre lati di un quadrilatero iscritto in una curva conica circolino intorno a tre punti dati in linea retta; il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero è una retta data di sito*. Or nella (I) facciasi $u = o$, si avrà $t = -\dfrac{an}{am + n}$; la quale espressione dinotando il valore, che acquista la x nelle equazioni delle polari de' tre punti dati (*), allorchè in esse la y diviene *zero*, ne se-

(*) Le equazioni delle polari de' tre punti dati, per esser questi in linea retta, sono

$$\begin{aligned} yb &= x\,(am + n) + an \\ yb' &= x\,(am + n) + an \\ yb'' &= x\,(am + n) + an \end{aligned}$$

gue, che la retta (I) debba passare pel punto in cui s' incontrano le polari medesime, cioè pel polo della retta, che li contiene. Ma queste conseguenze non sono particolari al caso del quadrilatero, cioè quando i punti dati sono al numero di tre; esse verificansi generalmente, sempre che i punti dati, essendo situati per dritto, le equazioni (E) sieno in numero impari; il che esige, che il numero dei punti dati sia impari, e quindi parilatero il poligono. Da che deducesi il seguente

Teorema 14.°

Se tutt' i lati di un poligono parilatero iscritto in una curva conica, circolino, all' infuori di uno, intorno a punti situati in linea retta; il lato libero passerà anch' esso per un dato punto, situato per dritto cogli altri (*).

E la nota del §. 19 somministrerà l' altro

Teorema 15.°

Se tutt' i vertici di un poligono parilatero circoscritto ad una curva conica percorrano, all' infuori di uno, rette date di sito, che s' intersecano in un medesimo punto; il vertice libero percorrerà anch' esso una retta data di sito, polare di questo punto.

E quando in esse la y diviene *zero*, ciascuna delle x si fa eguale a $\frac{-an}{am+n}$; il che mostra eziandio, che queste polari s'intersecano in un medesimo punto, polo della retta, che passa pe' loro poli.

(*) Questo teorema limitato al caso speciale del quadrilatero riproduce il bel teorema dovuto al nostro Flauti (*V.* §. 17).

§. 40. Questi due teoremi possono assai meglio rilevarsi geometricamente nel seguente modo.

Sia, per esempio PQRSTU un esagono variabile iscritto in una curva conica, i cui cinque lati PQ, QR, RS, ST, TU circolino intorno a' cinque punti A, B, C, D, E, dati in linea retta. E poichè da'punti A, B sono inflesse alla curva le AQP, BQR, se conducasi la corda PK parallela ad AB, la KR vi segnerà un dato punto H (*teor. 1.*). Di nuovo per ragion delle inflesse HRK, CRS, la PS vi segnerà l' altro dato punto H′. Così per le inflesse H′SP, DST, la TK vi segnerà il dato punto H″; e finalmente a causa delle inflesse H″TK, ETU, la corda PU, lato libero dell' esagono iscritto PQRSTU, dovrà passare per un dato punto H‴, situato sulla retta, che contiene i cinque punti A, B, C, D, E. *fig. 24.*

Lo stesso ragionamento varrà per qualunque altro poligono iscritto parilatero, i cui lati sieno assoggettati, all'infuori di uno, a circolare intorno a punti situati per dritto; e dalla nota del §.19 raccogliesi poi immediatamente come ne dipenda il teor.15.

§. 41. Per render compiuto in tutte le sue parti l' esame del probl. IV, rimarrebbe a dedurre dall' equazione (H) la natura, le affezioni, ed il corso della locale a riguardo della data curva, ed assegnarne i *determinanti* per l' effettiva descrizione; ma fortunatamente pel teorema del Flauti di sopra accennato, qualunque siesi il poligono, e quindi qualunque il numero dei punti dati, questa ricerca può sempre ricondursi al semplice caso del triangolo; e questo caso essendo stato già compiutamente discusso, non ci resta, che a mostrare in qual modo cosiffatta riduzione abbia luogo. Del che eccone succinta esposizione.

Pel quadrilatero

ossia per tre punti dati B , B' , B''.

fig. 25. Sia VV′ il lato libero di un quadrilatero variabile VUTV′ , iscritto in una data curva conica , i cui tre lati VU, UT, TV′ circolino respettivamente intorno a' tre punti dati B , B′ , B″. Si uniscano due qualunque tra essi per la BB′ , che incontri in C la *pp* , polare del terzo punto B″ ; e tirisi la CTQ . Or essendosi da' due punti dati C , B inflesse le CTQ , BUV , poichè la UT , che unisce due delle sezioni , passa pel dato punto B′, situato sulla BC , la VQ , congiungente delle altre due sezioni , passerà per un dato punto D , situato sulla stessa BC (*teor. 4.*) . Ma i due punti C , B″ sono tali , che la polare dell' uno passa per l' altro ; adunque la QV′ dovrà passare pel dato punto P, polo di B″C (*teor.3.*) . E però VV′, lato libero del quadrilatero VUTV′, sarà benanche lato libero del triangolo VQV′, i cui lati VQ , V′Q passano pe' due dati punti D , P ,

Pel pentagono

ossia per quattro punti dati B , B', B'', B'''.

fig. 26. Sia sempre VV′ lato libero di un pentagono VXUTV′ , iscritto in una curva conica , i cui rimanenti quattro lati circolino respettivamente intorno a' dati punti B , B′, B″, B‴. Si uniscano i dati punti due a due , e le congiungenti BB′ , B″B‴ s' incontrino in C, d'onde si conduca la CUQ. È chiaro che congiungendo le QV, QV′, debbano queste incontrare le CB, CB‴ in due dati punti D , D′ (*teor.4.*) (*) ; e però VV′, lato libero

(*) Essendosi condotta dal dato punto C la CUQ , e congiunte le QV ,

del pentagono VXUTV′, sarà benanche lato libero del risultante triangolo VQV′, i cui lati VQ, V′Q passano respettivamente pe' dati punti D, D′.

Senza dunque procedere più oltre, si vede chiaro, che, qualunque sia il numero de' dati punti, va sempre ridotto il caso generale al caso del triangolo, osservando solo, che quando il numero di que' punti sia impari, cioè parilatero il poligono, convenga introdurre la polare del primo, o dell'ultimo; il che più non richiedesi se il numero de' punti dati sia pari.

E si ravvisa in fine, che tutte le affezioni dichiarate innanzi tra la locale e la curva, pel semplice caso del triangolo, debbono egualmente aver luogo nel caso generale; cosicchè desse potranno toccarsi in due punti, in uno, o non toccarsi affatto; e potrà talora la locale addivenire anche una retta.

§. 42. Il problema del quale ci siamo occupati finora, conduce per analogia a trattarne un altro non meno specioso, nè men fecondo di verità geometriche, che sembrandoci del tutto nuovo, o al manco non conoscendo che altri siesene finora occupato, crediamo di far cosa non ingrata agli amatori della scienza, offrendo loro quest' altra ricerca, che mena a risultamenti oltremodo singolari, e degni di tutta la considerazione de' geometri.

QV′, vengono a risultare due quadrilateri iscritti QUXV, QUTV′. E poichè i tre lati del primo, QU, UX, XV passano pe' tre punti dati in linea retta C, B, B′, il quarto QV passerà pel dato punto D, situato sulla stessa retta (*teor. 4.*); e per la stessa ragione QV′ passerà pel dato punto D′, situato per dritto co' tre punti C, B″, B‴.

PROBLEMA V.

fig. 27. *Due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica si mantengano costantemente paralleli a due rette date di sito; si cerca il luogo geometrico del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero.*

Sol. Sia VV′ il lato libero di un triangolo VV′V″ iscritto colla proposta condizione in una curva dell' equazione

$$y^2 = mx^2 + 2nx$$

riferita a due assi, un de' quali sia qualunque diametro, e l' altro la tangente nel vertice di questo (*). Chiamando t, u le coordinate del punto U, concorso delle tangenti in V, V′, l' equazione del lato libero VV′ sarà

$$yu = x(tm + n) + tn$$

e dinotando al solito le estremità di questo lato con (z, v), (z', v'), si avranno le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} uv &= z\ (tm + n) + tn \\ uv' &= z'(tm + n) + tn \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Inoltre esprimendo con φ, φ', i rapporti, che determinano le inclinazioni degli altri due lati coll' asse delle ascisse, questi avranno respettivamente per equazioni

$$y - v = \varphi\ (x - z\ )$$

$$y - v' = \varphi'(x - z')$$

indicando dunque con z'', v'' le coordinate del vertice da essi

(*) Tra poco si vedrà per qual ragione non diamo agli assi un sito più convenientemente determinato.

compreso, si avrà

$$\left.\begin{aligned} v''-v &= \varphi(z''-z) \\ v''-v' &= \varphi'(z''-z') \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(B) \\ &(B') \end{aligned}$$

Finalmente esistendo sulla curva i tre punti V, V', V'', si avranno per essi le tre equazioni

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= mz^2 + 2nz \\ v'^2 &= mz'^2 + 2nz' \\ v''^2 &= mz''^2 + 2nz'' \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(C) \\ &(C') \\ &(C'') \end{aligned}$$

Or le sette equazioni (A), (B), (C) contengono tutte le condizioni del problema, e conviene da esse rilevare un' equazione solamente in t, u, che sarà quella del luogo geometrico cercato; ed a tal' uopo, senza perder di vista lo scopo, che abbiamo sempre avuto di esaminare i risultamenti, che possono ottenersi per diverse vie, procederemo all' eliminazione delle coordinate dei tre vertici V, V', V'', seguendo dapprima lo stesso metodo tenuto al §. 2. Ma per rilevare le espressioni delle coordinate del punto (v'', z'') in funzione tanto delle coordinate del punto (z, v), che di quelle del punto (z', v'), additeremo ancora un' altra via.

Sottraggasi (C) da (C''), e nella differenza

$$(v''+v)(v''-v) = m(z''^2-z^2) + 2n(z''-z)$$

sostituiscasi al fattore $(v''-v)$ l' espressione $\varphi(z''-z)$, che si ha da (B); risulterà l' equazione

$$\varphi(z''-z)(v''+v) = m(z''^2-z^2) + 2n(z''-z)$$

che, divisa pel fattore $(z''-z)$, diverrà

$$\varphi\,(v''+v)=m\,(z''+z)+2n \qquad (D)$$

Nel modo stesso, sottraendo (C′) da (C″), si otterrà col mezzo della (B′)

$$\varphi'\,(v''+v')=m\,(z''+z')+2n \qquad (D')$$

Avendosi in tal guisa le quattro equazioni (B), (B′), (D), (D′), nelle quali le v'', z'' trovansi solamente a primo grado, potranno queste esserne facilmente eliminate. Di fatti eliminando la v'' prima tra (B), (D), e poscia tra (B′), (D′), si avrà per primo risultamento

$$z''=\frac{z\,(\varphi^2-m)-2\varphi v+2n}{\varphi^2-m}$$

e per l'altro

$$z''=\frac{z'(\varphi'^2-m)-2\varphi'v'+2n}{\varphi'^2-m} \qquad (E)$$

e da ciò l'equazione

$$\frac{z\,(\varphi^2-m)-2\varphi v+2n}{\varphi^2-m}=\frac{z'(\varphi'^2-m)-2\varphi'v'+2n}{\varphi'^2-m}$$

che, sviluppata, potrà ordinarsi nel seguente modo

$$\left.\begin{array}{l}(m^2-\varphi^2\varphi'^2)\,(z-z')+(\varphi^2-\varphi'^2)\Big(m(z+z')+2n\Big)\\ \qquad -2\varphi\varphi'\,(\varphi v'-\varphi' v)-2m\,(\varphi v-\varphi' v')\end{array}\right\}=0$$

Sostituendo ora a z, z', v, v' i valori assegnati per esse nel §. 18 in funzioni delle coordinate del punto (t, u), si avrà, dopo le convenienti riduzioni, la seguente equazione

$$\left.\begin{array}{l}(m^2-\varphi^2\varphi'^2)\,us+(\varphi^2-\varphi'^2)\,nq\\ -\varphi\varphi'\Big(nu\,(\varphi-\varphi')-qs\,(\varphi+\varphi')\Big)\\ -m\,\Big(nu\,(\varphi-\varphi')+qs\,(\varphi+\varphi')\Big)\end{array}\right\}=0$$

la quale potrà mettersi sotto quest' altra forma

$$\left.\begin{array}{l} s(m-\varphi\varphi')\,u(m+\varphi\varphi')+n(\varphi-\varphi')\,q(\varphi+\varphi') \\ -s(m-\varphi\varphi')\,q(\varphi+\varphi')-n(\varphi-\varphi')\,u(m+\varphi\varphi') \end{array}\right\}=o$$

e quindi ridursi ad

$$\Big(s(m-\varphi\varphi')-n(\varphi-\varphi')\Big)\Big(u(m+\varphi\varphi')-q(\varphi+\varphi')\Big)=o \quad (F)$$

Questo risultamento offre due relazioni, cioè

$$s(m-\varphi\varphi')-n(\varphi-\varphi')=o \qquad (G)$$
$$u(m+\varphi\varphi')-q(\varphi+\varphi')=o \qquad (H)$$

la prima delle qnali dinota una sezione conica, a causa del radicale s; l' altra nna retta. E la retta, e la curva soddisferanno quindi al problem a; e ben s' intende che ciò debba verificarsi sotto diverso aspetto, che non potrebbero ad un caso identico appropriarsi contemporaneamente due linee sì diverse tra loro. Ma questa circostanza ci riconduce nello stesso scoglio della prima solnzione del prob. II° (§. 19 e 20); val quanto dire di non poter discernere quale delle dne linee convenga ritenere nel senso preciso del problema. Per tanto mettendo a profitto le considerazioni che allora ci fecero ravvisare i due casi che davan lnogo ad un duplice risultamento, potremo anche ora riconoscere il motivo della comparsa delle due relazioni (G), (H).

§. 43. In fatti dal vertice V″ del triangolo VV′V″ s' intenda condotta la corda V″V‴ ordinata all' asse OX, e, congiunta la VV‴; si presenterà per tal modo a risolvere l' altro problema di: *trovare il luogo del punto U, concorso delle tangenti nelle estremità della corda VV″, lato libero del quadri-* *fig. 28.*

latero variabile $VV'V''V'''$, iscritto in una curva conica con tal legge che i suoi rimanenti tre lati sien paralleli a tre rette date di sito (*) ; ed è chiaro che per risolverlo possa seguirsi identicamente l' analisi esposta nel problema del §. precedente. E poi-

---

(*) Questo problema , e la seguente illazione discendono dal problema proposto , in quanto che nell' analisi recata per esso il sito degli assi è arbitrario : ma se gli assi avessero potuto fin da principio scegliersi in modo da convenire esclusivamente al caso del triangolo , la soluzione non potrebbe più applicarsi al caso del quadrilatero ; ed in conseguenza non potrebbero neppur figurare ne' risultamenti entrambe le relazioni (G) , (H) , dovendo il calcolo condurre a quella sola , che conviene al primo caso, cioè a dire non dovrà incontrarsi il fattore , che compete all' altro , Una scelta più conveniente degli assi nell' attual problema si presenta invero naturalmente (ma senza che se ne vegga la ragionevolezza) a chiunque ne tenti la soluzione ; dappoichè non esiterebbe a valersi a tal uopo del diametro OX , che passa pe' punti medj di uno de' due lati del triangolo paralleli alle rette date di sito , e della tangente nel suo vertice ; e ciò basta perchè la soluzione non sia più applicabile al caso del quadrilatero . In fatti , ritenendo pe' punti V , V' le indicazioni qui sopra assunte , le coordinate del vertice V'' saranno $z, -v$; ed essendo

fig. 29.

$$y - v' = \varphi' (x - z')$$

l' equazione del lato V'V'', nel punto V'' si avrà

$$-v - v' = \varphi' (z - z')$$

nè altro rimane a farsi , che sostituir quivi in luogo di z, z', v, v' le corrispondenti espressioni del §. 18. il che eseguendo si ottiene immediatamente

$$-2n'u = 2\varphi' nus$$

cioè

$$s = -\frac{n}{\varphi'}$$

chè i due punti V'', V''' hanno comune l' ascissa, esprimendo tuttavia con φ, φ' i rapporti, che determinano le inclinazioni delle corde VV''', $V'V''$ coll' asse OX, si otterrà per quest'ultimo problema un risultamento identico ad (F); e quindi le stesse due relazioni (G), (H), che varranno entrambe a risolverlo. Ecco dunque un problema cui, al par del primo, soddisfano una retta, ed una curva; e poichè queste linee ne' due problemi, ben diversi tra loro, sono rappresentate da identiche equazioni, ne risulta che una delle linee dee corrispondere al primo problema, cioè al caso del triangolo; l' altra al secondo, cioè al caso del quadrilatero. Ma quale delle due linee risolverà spezialmente ciascuno di questi due problemi? Non essendo valevoli le considerazioni analitiche a deciferare direttamente siffatta ambiguità, ci limiteremo per ora a semplicemente asserire cosrispondersi la curva al 1° caso, la retta al 2°;

---

e, restituendo ad s il suo valore, risulterà in fine

$$u^2 - t(tm + 2n) = \frac{n^2}{\varphi'^2}$$

equazione ad una linea di 2° ordine, come sopra si è rinvenuto. Qui dunque il sito degli assi è stato valevole a render particolare la soluzione del problema pel caso preciso del triangolo. Ma non è sempre in questo modo che può riescire di ottenere un tale intento, come in fatti avviene pel quadrilatero, ove non ostante, che il sito degli assi si vegga fissato come sembra il più opportuno, pur tuttavolta la soluzione porta seco anche i risultamenti, che appartengono al triangolo. Vedremo più innanzi come possa scansarsi cosiffatto inconveniente; avvertiremo però da ora in generale, che solamente un lungo esercizio, e la soda conoscenza della Geometria degli antichi possono far sormontare all' analista gl' impacci, in cui suol trarre il metodo puro delle coordinate.

riserbandoci indi a poco di provarlo in altra guisa. E ritenendo per vero un tale assunto, passeremo ad esaminare le due relazioni (G), (H).

§. 44. La prima di esse, restituendo ad s il suo valore $\sqrt{\left(u^2 - t(tm + 2n)\right)}$, diviene

$$u^2 - t(tm + 2n) = n^2\left(\frac{\phi - \phi'}{m - \phi\phi'}\right)^2$$

equazione, che paragonata con quella della curva proposta,

$$y^2 - x(xm + 2n) = o$$

mostra, che le curve rappresentate da queste due equazioni sieno simili, similmente poste, e concentriche; da che deducesi il seguente

TEOREMA 16.°

Se un triangolo variabile sia iscritto in una curva conica con tal legge, che due dei suoi lati si mantengan sempre paralleli a due rette date di sito; il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà una curva conica simile, similmente posta, e concentrica alla prima.

E da questo teorema ricavasi poi facilmente l' altro

TEOREMA 17.°

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica si mantengan sempre paralleli a due rette date di sito; il lato libero sarà continuamente tangente ad un' altra curva conica simile, similmente posta, e concentrica alla prima.

§.45. **Dalla seconda relazione, cioè da (H), col sostituirvi in luogo di q il suo valore $(tm + n)$, si ottiene l' equazione**

$$u(m + \varphi\varphi') = (tm + n)(\varphi + \varphi') \qquad (I)$$

che, come vedesi, esprime una retta. Facendovi $u = o$, risulta

$$tm + n = o$$

d' onde

$$t = -\frac{n}{m}$$

la quale espressione, dinotando l' ascissa dal centro, fa conoscere, che la retta (I) sia un diametro della curva; e si ha perciò il seguente

TEOREMA 18.°

Se tre lati di un quadrilatero variabile iscritto in una curva conica si mantengan sempre paralleli a tre rette date di sito; il concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà una retta data di sito, diametro della curva.

E per assegnare un tal diametro basterà iscrivere nella curva un qualunque quadrilatero, che abbia tre lati paralleli alle tre rette date di sito: il diametro condotto pel punto medio del quarto lato sarà la locale cereata.

Da quest' ultimo teorema deducesi il seguente altro

TEOREMA 19.°

Se tre lati di un quadrilatero variabile iscritto in una curva conica si mantengan sempre paralleli a tre rette date di sito; il lato libero sarà ancor esso parallelo ad una retta data di sito, ch' è il diametro conjugato a quello, che passa pel suo punto di mezzo,

§. 46. La soluzione algebrica del problema, che dà luogo a' due precedenti teoremi, sarà sempre scabrosa ove non si ricorra a particolari artifizj di analisi. Pur tuttavolta essi rimarranno più agevolmente dimostrati, se, togliendo di mezzo l'idea di locale, si trasmuti la quistione nel seguente

Problema VI.

Iscrivere in una data curva conica un quadrilatero, i cui lati sien paralleli a quattro rette date di sito.

fig. 30. Sol. Si prendano per assi il diametro, che passa pe' punti medj delle corde parallele a qual si sia de' quattro lati, per esempio a VV‴, e la tangente nel suo vertice. Si dinotino con φ, φ', φ'', i rapporti, che determinano le inclinazioni degli altri tre lati VV′, V′V″, V″V‴ coll' asse delle ascisse; s' indichino con (z, v), (z', v'), (z'', v'') i tre punti V, V′, V″; il quarto V‴ sarà espresso da $(z, -v)$. E dopo ciò, la curva, ed i tre lati avendo respettivamente per equazioni

$$y^2 = mx^2 + 2nx$$
$$y - v = \varphi\ (x - z)$$
$$y - v' = \varphi'\ (x - z')$$
$$y - v'' = \varphi''(x - z'')$$

poichè l'ultimo di questi lati passa pel punto V‴, cioè pel punto $(z, -v)$, si avranno per la risoluzione del problema le seguenti equazioni

$$v' - v = \varphi\ (z' - z) \qquad (K)$$
$$v'' - v' = \varphi'\ (z'' - z') \qquad (K')$$
$$-v - v'' = \varphi''(z - z'') \qquad (K'')$$

$$v^2 = mz^2 + 2nz \qquad (L\ )$$
$$v'^2 = mz'^2 + 2nz' \qquad (L')$$
$$v''^2 = mz''^2 + 2nz'' \qquad (L'')$$

dalle quali conviene ricavare un'eliminata ad una incognita, o tutto al più a due incognite coordinate.

A tal effetto somminsi (K) con (K'), e poi si moltiplichino i due membri del risultamento

$$v'' - v = \varphi\,(z' - z) + \varphi'\,(z'' - z')$$

per i due membri di (K'') respettivamente; si avrà dopo ciò, in virtù di (L), ed (L''),

$$m\,(z + z'') + 2n = \varphi''\Big(\varphi\,(z' - z) + \varphi'\,(z'' - z')\Big) \qquad (M)$$

Nel modo stesso aggregando (K') con (K''), e moltiplicando il risultamento per (K), si avrà, col mezzo di (L), e di (L')

$$m\,(z' + z) + 2n = \varphi\,\Big(\varphi'(z' - z'') + \varphi''(z'' - z)\Big) \qquad (N)$$

Sottraendo ora (N) da (M), la differenza

$$m\,(z' - z'') = \varphi'\varphi''(z' - z'') - \varphi\varphi'(z' - z'') - \varphi\varphi''(z' - z'')$$

per le convenevoli riduzioni diverrà

$$m = \varphi'\varphi'' - \varphi\varphi' - \varphi\varphi''$$

relazione, in cui non figura alcuna incognita. Risulta da ciò, che il problema proposto sia più che determinato; e quindi il sito del quarto lato del quadrilatero dipenderà da quello degli altri tre. In conseguenza se tre de' suoi lati sien paralleli a tre rette date di sito; il diametro corrispondente al quarto lato sarà dato di sito: ed assegnato un tal diametro il problema diverrà indeterminato; cioè a dire, che;

Se iscrivasi in una curva conica un quadrilatero, che abbia tre lati paralleli alle tre rette date di sito: il quarto lato, comunque varj un tal quadrilatero, sarà sempre parallelo alle ordinate del diametro, che passa pel suo punto medio.

La qual conseguenza riproduce immediatamente i due teoremi 18, 19, rimanendo per tal modo comprovata la proposizione, assunta in fine del §. 43, ove fu detto che la locale cercata nel problema V. era una curva.

§. 47. Dopo aver esaminato il problema proposto ne' casi speciali del triangolo, e del quadrilatero, passeremo a generalizzarlo per un poligono iscritto di qualsivoglia numero di lati paralleli ad altrettante rette date di sito; ma sarà opportuno di prima risolvere geometricamente i due problemi che negli anzidetti due casi contengonsi. Ond' è che esporremo la seguente

Analisi geometrica per la soluzione del problema V.

fig. 31. Sia sempre U il punto di concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero VV′ di un triangolo VV′V″, che abbia gli altri due lati paralleli a due rette date di sito, o, che torna lo stesso, ordinati a due diametri dati di sito C*d*, C*b*.

Conducasi la corda VR parallela alla V′V″: le corde VV″, V′R saranno le diagonali del quadrilatero a lati paralleli RVV′V″; quindi esse s' intersecheranno in un punto T sul diametro C*b*, e sarà UT parallela ad RV (*). Ciò posto si congiunga UC;

(*) Veg. il teor. VII. della nostra memoria — *Teoremi sulle Sezioni Coniche*, ec.

la corda de' contatti VV' rimarrà bisecata in Y, e la VV'' essendolo in Q, sarà YQ parallela a V'V'', ossia ad UT. Or conducasi XZ parallela alla stessa UT; ed essendo le CU, CX, CY in proporzione continua, starà CU : CY :: CU² : CX²; ma sta CU : CY :: CT : CS, e la ragione di CT : CS è data, per esser dati di specie i triangoli CQT, CQS. Adunque sarà pur data la ragione di CU² : CX², e perciò anche quella di CU : CX; donde vedesi, che il punto U ne tocchi una curva simile, e similmente posta alla data. E ciò dà luogo agli stessi teoremi 16, e 17 poc'anzi rilevati.

§. 48. Ma non sarà superfluo di qui accennare due altri importanti teoremi, che discendon da essi come corollarj.

TEOREMA 20.°

Sieno due curve coniche simili, similmente poste, e concentriche, e s' iscriva comunque nell' esterna di esse un triangolo VV'V'', che abbia un lato VV' tangente l' interna; qualunque altro triangolo vv'v'' iscritto in quella, che abbia due lati vv'', v'v'' paralleli agli altri due lati VV'', V'V'' del primo triangolo, avrà il terzo lato vv' costantemente tangente la curva interna. fig. 32.

Rilevandosi dall' analisi geometrica quassù recata, che sia data la ragione di CU : CX, poichè sta CU : CX :: CX : CY; anche la ragione di CX : CY sarà data. E perciò

TEOREMA 21.°

I semidiametri condotti pe' punti medj delle corde, che in una fig. 31.

curva conica sottendono angoli compresi da corde parallele a due rette date di sito, rimangon divisi in que' punti proporzionalmente.

AVVERTIMENTO.

fig. 33. §.49. Scorgesi poi facilmente, che: *se la curva è parabola, ogni sua corda VV', che vi sottenda angoli cosiffattamente condizionati, debba troncare sul diametro, che passa pel suo punto medio, e verso il vertice, la parte XY d' invariabile grandezza.*

LEMMA AL SEGUENTE PROBLEMA.

fig. 34. §.50. *Se da due punti B, C, del perimetro di una curva conica si tirino due coppie di corde parallele BA, CD; Ba, Cd; le congiungenti le estremità opposte Da, Ad saranno benanche parallele.*

DIM. Sia H il punto d' incontro delle AB, *d*C, e G quello delle *a*B, DC. Ed essendo HA.HB : H*d*.HC :: CG.GD : BG.G*a*, per essere HB = CG, ed HC = BG, risulterà HA : H*d* :: GD : G*a*. Quindi i triangoli AH*d*, DG*a* saranno simili; e sarà D*a* parallela ad A*d*, come si è proposto a dimostrare.

PROBLEMA VII.

fig. 35. §.51. *Sia AD il lato libero di un quadrilatero variabile ABCD, iscritto in una curva conica con tal legge, che i suoi tre rimanenti lati sien paralleli a tre rette date di sito; si cerca il luogo del punto U, concorso delle tangenti in A, D.*

SOL. Iscrivansi ad arbitrio le tre corde *ab*, *bc*, *cd* parallele

respettivamente alle AB , BC , CD , cioè alle tre rette date di sito ; e si unisca *ad* . Essendosi da' punti B, *b* condotte le due coppie di corde parallele BA , *ba* ; BC , *bc* , le congiungenti A*c* , *a*C., pel lemma precedente , saranno parallele : ma le *cd* , CD sono del pari tra loro parallele ; dunque il saran pure le *ad* , AD . Or potendo supporsi fisso il quadrilatero *abcd* , comunque varii l' altro ABCD , risulterà sempre il suo lato AD parallelo ad *ad* : quindi il luogo del punto U , concorso delle tangenti in A , D , sarà il diametro, che passa pel punto medio di *ad* ; cioè una retta data di sito . Il che riproduce i due teoremi 18 e 19.

Corollario 1.°

§.52.Se dunque un quadrilatero comunque iscritto in una curva conica abbia tre lati paralleli a tre rette date di sito, il quarto lato sarà anch' esso parallelo ad una retta data di sito ; e questa essendo propriamente il diametro conjugato a quello , che passa pel suo punto di mezzo, può facilissimamente assegnarsi.

Corollario 2.°

§.53.Iscrivasi ad arbitrio in una curva conica una serie di corde successive, ed in numero impari,tutte parallele ad altrettante rette date di sito , e sieno per esempio le AB, BC, CD, DE, EF, FG , GH , HI , IK . Sottendendo le prime tre con la AD , questa sarà parallela ad una retta data di sito (*cor. prec.*) . Quindi chiudendo con AF le AD , DE, EF , anche AF sarà parallela ad una retta data di sito ; e lo sarà pure la AH , che chiude le AF , FG , GH ; e finalmente anche la AK , che sot-

fig. 36

tende le AH, HI, IK. Ma la stessa AK chiude pure la serie delle corde iscritte; il che dee verificarsi qualunque sia il loro numero, purchè impari: si avrà perciò il seguente

TEOREMA 22.°

Se iscrivasi in una curva conica una serie di corde successive, ed in numero impari, parallele ad altrettante rette date di sito; la corda, che chiude la serie, sarà benanche parallela ad una retta data di sito.

§. 54. Dopo tutto ciò chi non vede, che la soluzione del problema generale col metodo geometrico rimanga all'istante compiuta, ed in modo, che niun altro metodo per tal quistione potrebbe stargli a fronte? Sarebbe anzi superfluo impegnarci a mostrare come ciò abbia luogo; ma pure, a render compiuto l'argomento, brevemente l'accenneremo.

PROBLEMA VIII.

Un poligono variabile di k lati sia con tal legge iscritto in una curva conica, che ($k - 1$) lati sien paralleli ad altrettante rette date di sito; si cerca il luogo del concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero.

SOL. Questo problema offre due casi, secondochè k sia pari o impari; e però impari, o pari ($k - 1$).

fig. 36. Nel primo caso, se AK rappresenti il lato libero del poligono, esso verrà a chiudere una serie di corde in numero impari; e quindi dovendo questo lato, pel secondo de' precedenti corolla-

r); risultar parallelo ad una retta data di sito, la locale cercata sarà pure una retta data di sito.

Nel secondo caso poi, ove AL rappresenti il lato libero del poligono, compiendo il triangolo ALK, il lato AK chiuderà egualmente una serie di corde in numero impari; e sarà perciò parallelo ad una retta data di sito. Laonde essendo anche l'altro lato LK parallelo ad una retta data di sito, AL, lato libero del poligono, sarà benanche lato libero del triangolo AKL, i cui rimanenti lati AK, KL son paralleli a due rette date di sito. E però, pel teor. 16., il luogo del concorso delle tangenti nell'estremità del lato libero AL, sarà una curva conica simile, similmente posta, e concentrica alla data. fig. 37.

Da tutto ciò discendono i seguenti

Teorema 23.°

Se (k — 1) lati di un poligono variabile iscritto in una curva conica sien paralleli ad altrettante rette date di sito; il concorso delle tangenti nelle estremità del lato k.mo, sarà una retta data di sito, se k sia pari; e, se sia impari, sarà una curva conica, simile, similmente posta, e concentrica alla data.

Teorema 24.°

Se (k — 1) lati di un poligono variabile iscritto in una curva conica sien paralleli a rette date di sito; il lato k.mo sarà ancor esso parallelo ad una retta data di sito, se k sia pari; e, se sia impari, ne toccherà nel suo punto di mezzo una curva conica simile, similmente posta, e concentrica alla data.

Questi due ultimi teoremi contengono un' importante proprie-

tà delle curve coniche, la quale ravvicina semprepiù queste curve al cerchio in riguardo alle proprietà angolari, e sotto questo rapporto specialmente può essa divenire utilissima. Essa nel cerchio è quasi intuitiva; e pure non è stata da altri avvertita: se non che l' illustre Lhuillier riconobbe essere più che determinato il problema d': *iscrivere in questa curva un poligono parilatero, i cui lati sien paralleli a rette date di sito.*

Per tanto una volta che i teoremi 23, e 24 si fossero rilevati solamente sul cerchio, la teorica delle projezioni induce a conchiudere, senz' altro ragionamento, ch' essi sieno identicamente applicabili ad ogni curva conica. Un tal metodo però, che può ben adoperarsi per lo scovrimento delle proprietà indicate, non sembra pur proprio a convenevolmente dimostrarle.

§. 55. A render compiuto l' argomento, del pari rimarrebbe ad esporre la soluzione algebrica del problema generale, cioè del probl. VIII. Ma noi non faremo altro, che abbozzarla, tralasciandone per esercizio a' giovani lo sviluppo compiuto.

Soluzione algebrica del problema VIII.

Sia VV' il lato libero di un poligono $VV'V''V'''V''''$ iscritto in una curva conica rappresentata dall' equazione

$$y^2 = mx^2 + 2nx$$

ed i cui rimanenti lati sien paralleli a rette date di sito. Esprimendo come per lo innanzi con φ, φ', φ'', φ''' ec. le loro inclinazioni coll' asse delle ascisse, e supponendo per cagion d' esempio che il numero di questi lati sia 4, talchè il poligono risulti un pentagono; dinotando inoltre nel modo consueto le

coordinate de' suoi vertici, e quelle del concorso delle tangenti in V, V', corrisponderanno respettivamente a que' lati le equazioni

$$y - v = \varphi\ (x - z)$$
$$y - v'''' = \varphi'\ (x - z'''')$$
$$y - v''' = \varphi\ (x - z''')$$
$$y - v'' = \varphi'''\ (x - z'')$$

E quella del lato libero VV' sarà

$$yu = x\,(tm + n) + tn$$

Quindi le equazioni al problema saranno

$$\left.\begin{aligned} v''' - v &= \varphi\ (z''' - z) \\ v''' - v'''' &= \varphi'\ (z''' - z'''') \\ v'' - v''' &= \varphi''\ (z'' - z''') \\ v' - v'' &= \varphi'''(z' - z'') \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= mz^2 + 2nz \\ v'^2 &= mz'^2 + 2nz' \\ v''^2 &= mz''^2 + 2nz'' \\ v'''^2 &= mz'''^2 + 2nz''' \\ v''''^2 &= mz''''^2 + 2nz'''' \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

$$\left.\begin{aligned} vu &= z\,(tm + n) + tn \\ v'u &= z'\,(tm + n) + tn \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

L' eliminata in t, u da queste undeci equazioni, sarà quella del luogo geometrico cercato.

Per eseguire una tale eliminazione, pongasi
$v = rz$, $v' = r'z'$, $v'' = r''z''$, $v''' = r'''z'''$, $v'''' = r''''z''''$;
combinando queste cinque equazioni con le cinque altre equazioni (B), respettivamente, si dedurranno i seguenti valori

$$z = \frac{2n}{r^2 - m}, \qquad v = \frac{2nr}{r^2 - m}$$

$$z' = \frac{2n}{r'^2 - m}, \qquad v' = \frac{2nr'}{r'^2 - m}$$

$$z'' = \frac{2n}{r''^2 - m}, \qquad v'' = \frac{2nr''}{r''^2 - m}$$

$$z''' = \frac{2n}{r'''^2 - m}, \qquad v''' = \frac{2nr'''}{r'''^2 - m}$$

$$z'''' = \frac{2n}{r''''^2 - m}, \qquad v'''' = \frac{2nr''''}{r''''^2 - m}$$

in virtù dei quali le equazioni (A) diverranno, dopo le riduzioni,

$$\begin{aligned} m + rr'''' &= \varphi\,(r + r'''') \\ m + r''''r''' &= \varphi'\,(r'''' + r''') \\ m + r'''r'' &= \varphi''\,(r''' + r'') \\ m + r''r' &= \varphi'''\,(r'' + r') \end{aligned}$$

Ed ottenute queste equazioni ognun vede, che la soluzione del problema non offra più difficoltà; dappoichè è facile rilevar da esse l' eliminata in r, r'; quindi l' altra in z, v, z', v'; e finalmente quella, che cercasi, in t, u, ricorrendo alle espressioni del §. 18. Or tutto questo non essendo che un lavoro di puro calcolo, nè presentando altro ostacolo, che il fastidio di eseguirlo, il tralasceremo di buon grado. Non vogliamo però rimanerci dall' avvertire, che da' risultamenti cui dovrà pervenirsi, convenevolmente generalizzati, debbano pur dedursi i teoremi 23, 24: e lasciamo agli apprezzatori dell' eleganza geometrica il vedere, se una tal via lunga ed indiretta possa preferirsi a quella semplice, chiara e diretta, che la Geometria ne ha di sopra somministrata.

§. 56. Le condizioni alle quali abbiamo finora assoggettati i lati dei poligoni variabili iscritti nelle curve coniche son quelle o di dover girare intorno a punti dati, o di mantenersi paralleli a rette date di sito. In ciò che segue li assoggetteremo ad esser tangenti ad altre date sezioni coniche: ma per ora esporremo di tal ricerca quella parte ch' è più connessa co' principii precedentemente stabiliti.

§. 57. Intanto ad evitare ripetizioni avvertiamo, che nel proseguimento alle coordinate di un punto qualunque di una curva conica, data dall' equazione $y^2 = mx^2 + 2nx$, sostituiremo il loro rapporto; cioè, avendosi per esempio su di essa i punti (z, v), (z', v') ec. faremo

$$r = \frac{v}{z}, \quad r' = \frac{v'}{z'}, \text{ ec.} \qquad (1)$$

di tal che l' equazione della retta che passa per quei due punti essendo

$$y - v = \frac{v - v'}{z - z'}(x - z)$$

oppure

$$y(z - z') - x(v - v') = zv' - z'v$$

colla sostituzione dei valori di z, z', v, v' più sopra rilevati in r, r' (§.55.) diverrà

$$y(r + r') - x(rr' + m) = 2n \qquad (2)$$

e sotto questa forma assumeremo da ora innanzi l' equazione di una corda della curva $y^2 = mx^2 + 2nx$, condotta per due punti qualunque del suo perimetro (z, v), (z', v').

§. 58. Inoltre facendo mestieri conoscere la relazione, che dee aver luogo tra i determinanti di una retta, e di una curva

di 2° ordine affinchè queste due linee siano tra loro tangenti, sarà opportuno il premettere una tal ricerca.

Sien dunque le equazioni della retta, e della curva rispettivamente dinotate da

$$y = ax + b \qquad (3)$$

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Cy + Dx^2 + 2Ex + F = o \qquad (4)$$

eliminando la y tra queste due equazioni si avrà la seguente equazione di 2° grado in x

$$x^2(Aa^2 + 2Ba + D) + 2x(Aba + Bb + Ca + E) + Ab^2 + 2Cb + F = o$$

le cui radici corrisponderebbero alle ascisse dei punti d'incontro delle due linee; ma per ragion del contatto esse debbono eguagliarsi, dunque le radici della precedente equazione saranno eguali; e quindi il quadrato della metà del coefficiente del suo secondo termine sarà quanto l'ultimo, cioè si avrà

$$(Aba + Bb + Ca + E)^2 = (Aa^2 + 2Ba + D)(Ab^2 + 2Cb + F)$$

donde si ha dopo gli sviluppi, e riduzioni

$$\left.\begin{array}{r}(E^2 - DF) + a^2(C^2 - AF) + 2b(BE - CD) + 2ab(AE - BC) + \\ 2a(CE - BF) + b^2(B^2 - AD)\end{array}\right\} = o$$

equazione di condizione che dee aver luogo affinchè la retta (3) possa toccare la curva (4). E se si faccia per brevità

$$\left.\begin{array}{l}E^2 - DF = A',\ C^2 - AF = B',\ BE - CD = C' \\ AE - BC = D',\ CE - BF = E',\ B^2 - AD = F'\end{array}\right\} (5)$$

la precedente condizione si ridurrà ad

$$A' + a^2B' + 2bC' + 2abD' + 2aE' + b^2F' = o \qquad (6)$$

Ciò premesso passiamo a risolvere il seguente

PROBLEMA IX.

§. 59. *Date due curve coniche (C), (C′), iscrivere nella prima di esse un triangolo, che sia circoscritto all' altra.*

SOLUZ. Si prendano per assi qualunque diametro di (C), e la tangente al suo vertice, talchè riferite le due curve a questo sistema di assi, possano generalmente essere rappresentate dalle equazioni

$$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad (C)$$
$$Ay^2 + 2Bxy + 2Cy + Dx^2 + 2Ex + F = o \qquad (C')$$

Sia RR′ R″ il chiesto triangolo. I suoi tre lati RR′, R′ R″, R″R, come corde di (C), avranno, in virtù di (2), rispettivamente per equazioni f. 38, 39.

$$y(r + r') - x(rr' + m) = 2n$$
$$y(r' + r'') - x(r'r'' + m) = 2n$$
$$y(r'' + r) - x(r''r + m) = 2n$$

e poichè debbono toccare la curva (C′), queste equazioni diverranno in virtù della relazione (6)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} A'(r+r')^2 + B'(rr'+m)^2 + 4nC'(r+r') + 4nD'(rr'+m) + \\ 2E'(r+r')(rr'+m) + 4n^2F' \end{array}\right\} = o \\ \left.\begin{array}{r} A'(r'+r'')^2 + B'(r'r''+m)^2 + 4nC'(r'+r'') + 4nD'(r'r''+m) + \\ 2E'(r'+r'')(r'r''+m) + 4n^2F' \end{array}\right\} = o \\ \left.\begin{array}{r} A'(r''+r)^2 + B'(r''r+m)^2 + 4nC'(r''+r) + 4nD'(r''r+m) + \\ 2E'(r''+r)(r''r+m) + 4n^2F' \end{array}\right\} = o \end{array}\right\} (7)$$

le quali tre equazioni nelle tre incognite r, r', r'' varranno a risolvere il problema. Ciò posto si ordinino le prime due rispetto ad r' comune ad entrambe, e dopo aver moltiplicata la

prima pel coefficiente del primo termine della seconda, e questa pel coefficiente del primo termine della prima, si sottragga l' un prodotto dall' altro, e si cancelli dal residuo il fattor comune $(r - r'')$. Si pratichi esattamente lo stesso tra la seconda, e la terza, ordinate rispetto ad r'' comune all' una ed all' altra; e si avrà un secondo residuo, nel quale si cancellerà egualmente il fattor comune $(r' - r)$. Di poi si sottragga l' un residuo dall' altro; la differenza conterrà pure un fattor comune $(r' - r'')$, che cancellato, rimarrà la seguente equazione tra sole quantità note

$$\left.\begin{array}{r} A'^2 + 2mB'A' + 4nA'D' - 8nC'E' - 4mE'^2 + 4mnD'B' + \\ 4n^2B'F' + m^2B'^2 \end{array}\right\} = 0 \quad (8)$$

il che mostra che il problema non possa essere risoluto, che nel caso, in cui si verifichi tra i determinanti delle due curve date la relazione (8). Ma, quando ciò sia, è chiaro che la soluzione risulti indeterminata. Rilevasi per tanto da ciò il seguente

Teorema 25.

Se due curve coniche sien tali, che per un caso un triangolo iscritto nell' una risulti circoscritto all' altra; qualunque altro triangolo iscritto nella prima con due lati tangenti all' altra, avrà il terzo lato tangente la curva stessa.

Ovvero

Se ad un triangolo s' iscriva una curva conica, e se ne circoscriva un' altra; qualunque altro triangolo iscritto in questa con due lati tangenti la prima, avrà il terzo lato anche tangente la curva medesima.

§. 60. Intanto la relazione (8) colla ripristinazione dei valori (5) diviene

$$\left.\begin{array}{r}(E^2-DF)^2+2m(E^2-DF)(C^2-AF)+4n(E^2-DF)(AE-CB)-\\ 4m(CE-BF)^2-8n(BE-CD)(CE-BF)^2+4mn(C^2-AF)(AE-CB)+\\ 4n^2(C^2-AF)(B^2-AD)+m^2(C^2-AF)^2\end{array}\right\}=o \quad (9)$$

dalla quale espressione molti teoremi possono rilevarsi, a misura che si disporrà delle diverse quantità, che la compongono.

§. 61. Vediamo a cagion di esempio cosa avviene se le due curve date sieno cerchi. In questo caso prendendo per asse delle x la congiungente de' centri, le due equazioni (C), (C′) si ridurrannno ad

$$y^2=2nx-x^2 \qquad (c)$$

$$y^2+x^2-2ax+a^2-n'^2=o \qquad (c')$$

ove n' indica il raggio del cerchio al quale il triangolo si circoscrive, ed a l'ascissa del suo centro. Paragonando dunque i coefficienti dei termini di (c), (c') co' coefficienti dei termini di (C), (C′), si avrà

$$\left.\begin{array}{l}m=-1\ ,\ A=1\ ,\ B=o\ ,\ C=o\\ \qquad\qquad D=1\ ,\ E=-a\ ,\ F=a^2-n'^2\end{array}\right\} \quad (10)$$

e quindi si otterrà da (5)

$$\left.\begin{array}{l}A'=E^2-DF=n'^2,\ B'=C^2-AF=-(a^2-n'^2)\\ C'=BE-CD=o\ ,\ D'=AE-BC=-a\\ E'=CE-BF=o\ ,\ F'=B^2-AD=-1\end{array}\right\} \quad (11)$$

laonde la relazione (8) si ridurrà ad

$$a^2(4n^2-4na+a^2)-4n^2n'^2=o$$

ossia ad

$$a^2(2n-a)^2=4n^2n'^2 \qquad (12)$$

o finalmente, estraendo da ambo i membri la radice quadrata, ad

$$a(2n - a) = 2nn' \qquad (13)$$

fig. 40. Traducendo questa relazione sulla figura si ha

$$Oc' \times c'o = 2\ Oc \times O'c'.$$

E quindi

TEOREMA 26.

Il centro del cerchio iscritto in un triangolo divide il diametro del cerchio circoscritto in due parti tali, che il loro rettangolo è quanto il doppio di quello contenuto dai raggi de' cerchi medesimi.

fig. 41. §. 62. Il punto c' può anche cadere al di là dei punti O O', ed aversi egualmente $Oc' \times c'o = 2\ Oc \times O'c'$; ma in questo caso il cerchio (c') sarebbe ex-iscritto al triangolo. Questa circostanza è infatti anche additata dall' analisi, mentre nell' estrarre la radice quadrata dalla (12) per ottenere la (13), avrebbe dovuto farsi uso del doppio segno $\pm$.

§. 63. Essendo $\quad 2na - a^2 = 2nn'$

sarà

$$2na - a^2 - n^2 = 2nn' - n^2$$

Cioè

$$(n - a)^2 = n(n - 2n')$$

E sulla figura

$$\overline{cc'}^2 = Oc\,(Oc - 2O'c')$$

Donde l' altro

TEOREMA 27.

La distanza tra i centri del cerchio iscritto, e circoscritto ad un triangolo è media proporzionale tra il raggio del circoscritto, e la differenza tra il raggio medesimo, e 'l doppio dell' iscritto.

Ed ecco rilevato in modo diretto dal caso il più generale un notissimo teorema, che trovasi proposto negli annali di Gergonne, e del quale concorsero a dare dimostrazioni più o meno eleganti Garnier, Lhuillier, ed altri distinti geometri.

PROBLEMA X.

§. 64. *Ora date le due curve coniche* (C), (C') *si cerca di iscrivere nella prima un quadrilatero che sia circoscritto all'altra.*

SOL. Affin di rendere il calcolo più semplice noi distenderemo la soluzione pel caso, che le due curve date sieno due cerchi, ma sarebbe identicamente la stessa per due curve qualunque; di che è ben facile ad assicurarsi da ciò, che segue. Pertanto essendo (c), (c') le equazioni de' due cerchi, quelle de' quattro lati del quadrilatero iscritto nel primo, assoggettati a toccare il secondo, saranno come le (7), debitamente ridotte co' valori (11)

$$n'^2(r+r')^2+(n'^2-a^2)(rr'-1)^2-4na(rr'-1)-4n^2=0$$
$$n'^2(r'+r'')^2+(n'^2-a^2)(r'r''-1)^2-4na(r'r''-1)-4n^2=0$$
$$n'^2(r''+r''')^2+(n'^2-a^2)(r''r'''-1)^2-4na(r''r''-1)-4n^2=0$$
$$n'^2(r'''+r)^2+(n'^2-a^2)(r''r-1)^2-4na(r'''r-1)-4n^2=0$$

che sviluppate , dopo aver fatto per brevità

$$S = n'^2 - a^2 \;,\; P = 4na - 2a^2 \;,\; H = n'^2 - (2n - a)^2 \quad (19)$$

diverranno respettivamente

$$\left.\begin{array}{l} n'^2(r^2 + r'^2) + Sr^2r'^2 - Prr' + H = o \\ n'^2(r'^2 + r''^2) + Sr'^2r''^2 - Pr'r'' + H = o \\ n'^2(r''^2 + r'''^2) + Sr''^2r'''^2 - Pr''r''' + H = o \\ n'^2(r'''^2 + r^2) + Sr'''^2r^2 - Pr'''r + H = o \end{array}\right\} \quad (20)$$

Ciò posto si sottraggano queste equazioni l' una dall' altra , e si avrà

$$(n'^2 + Sr'^2)(r + r'') = Pr' \quad (21)$$

$$(n'^2 + Sr''^2)(r' + r''') = Pr'' \quad (22)$$

$$(n'^2 + Sr'''^2)(r + r'') = Pr''' \quad (23)$$

moltiplicando ora tra loro le (21) e (22) membro a membro risulterà

$$(n'^2 + Sr'^2)(n'^2 + Sr''^2)(r + r'')(r' + r''') = P^2r'r'' \quad (24)$$

E poichè sottraendo la (23) dalla (21) trovasi

$$S(r + r'')(r' + r''') = P$$

così la (24) diverrà

$$(n'^2 + Sr'^2)(n'^2 + Sr''^2) = PSr'r''$$

dalla quale ricavasi

$$S(n'^2r'^2 + n'^2r''^2 + Sr'^2r''^2) = SPr'r'' - n'^4$$

Ma dalla seconda delle equazioni (20) si ha

$$S(n'^2r'^2 + n'^2r''^2 + Sr'^2r''^2) = SPr'r'' - SH$$

Sarà dunque

$$SPr'r'' - n'^4 = SPr'r'' - SH$$

Cioè

$$n'^4 = SH \quad (25)$$

D' onde si conchiude , siccome pel caso del triangolo , che per poter risolvere l' attual problema, debba verificarsi tra i determinanti dei cerchi , e del loro sito , la relazione (25) ; e che , quando ciò sia , la soluzione risulti indeterminata. E poichè si perverrebbe ad un risultamento di egual natura ove le due curve coniche sieno qualunque , si ha in generale

Teorema 28.

Se due curve coniche sien tali che per un caso un quadrilatero iscritto nell' una risulti circoscritto all' altra , qualunque altro quadrilatero si iscriva nella prima con tre lati tangenti la seconda , avrà il quarto lato tangente la curva istessa (*).

(*) Questo teorema avrebbe potuto dedursi senz' altro calcolo dalla sola ispezione delle quattro equazioni (20) , dapoichè essendo in numero pari alle incognite (delle quali non ve ne ha che due in ciascuna), è chiaro che la loro simultanea coesistenza non può aver luogo , attesa la identità dei coefficienti : che ciò potrebbe solamente verificarsi in virtù di una certa relazione tra i coefficienti medesimi : e quindi che dall' eliminazione tra queste equazioni non può per ultimo risultamento ottenersi che un' equazione di condizione tra le quantità date , com' è la (25) . Ed è poi noto che quando dal maneggio di equazioni spettanti ad un problema si perviene ad un risultamento di tal natura , verificata quella condizione , la soluzione debb' esserne indeterminata . Era però d' uopo procedere alla eliminazione per conoscere qual fosse la relazione , che legava i coefficienti , come si è pure praticato nel caso del triangolo al §. 59 quando dalle tre equazioni (7) si è rilevata la relazione (8).

Egli è intanto da osservarsi , che , se generalizzando la ricerca , si cercasse di iscrivere tra le due curve (C) , (C′) un poligono di m lati , le equazioni, che si otterrebbero per la risoluzione di questo problema sarebbero della stessa forma di quelle ottenute pel caso attuale del quadrilate-

§. 65. Restituendo nella relazione (25) ad S, ed H i valori (19) si ha

$$n'^4 = (n'^2 - a^2) \left(n'^2 - (2n - a)^2 \right)$$

d' onde si ottiene

$$(2na - a^2)^2 = n'^2 \left((2n - a)^2 + a^2 \right) \qquad (26)$$

espressione, che giova ancor mettere sotto quest' altra forma

$$(2na - a^2)^2 = - 2n'^2 (2na - a^2) + 4n^2 n'^2 \qquad (27)$$

e tale è la relazione che deve verificarsi tra i determinanti dei due cerchi affinchè possano iscriversi in uno quadrilateri che sieno circoscritti all' altro. Per vederne il significato geometrico si estragga da' due membri di (26) la radice quadrata, e si avrà

---

ro, e per l'altro del triangolo, cioè delle (20), o delle (7). Il loro numero, e quello delle incognite sarebbe eguale ad m, ciascuna equazione non ne conterrebbe che due; ed i coefficienti in tutte sarebbero sempre identici. Quindi si può conchiudere che la presente ricerca, generalizzata, offre le medesime conseguenze rilevate pe' due casi speciali, che si sono esaminati; cioè che *se due curve coniche sien tali, che per un caso un poligono di* m *lati iscritto nell' una risulti circoscritto all' altra, qualunque altro poligono iscrivasi in quella con* (m — 1) *lati tangenti all' altra, avrà benanche l' ultimo lato tangente alla curva medesima*.

Ben si comprende che la natura della relazione tra' coefficienti varia a misura che varia il numero dell' equazioni, ossia il numero dei lati del poligono; ma se voglia nei casi speciali rilevarsi una tal relazione, converrà procedere alla eliminazione. Intanto non veggendo da altri considerate, ed esaminate equazioni a coefficienti identici, come quelle che si sono a noi presentate in tal ricerca, ed osservando che il loro maneggio coi metodi generali riesce infruttuoso, ci riserbiamo di trattar di proposito in altro rincontro di cosiffatto argomento che non è di lieve importanza, e da che pur dipende l' estensione del problema XI,

$$a(2n-a)=n'\sqrt{\left((2n-a)^2+a^2\right)}$$

Traducendo ora sulla figura i simboli di quest' ultima espressione trovasi

$$Oc'\times c'o = c'O'\times\sqrt{\left(\overline{c'o}^2+\overline{c'O}^2\right)}$$ *f. 42, 43.*

oppure, applicando al punto c' la $c'E$ eguale a $c'O$, e perpendicolare ad Oo,

$$c'E\times c'o = c'O'\times Eo$$

ma per le proprietà de' triangoli rettangoli si ha

$$c'E\times c'o = c'F\times Eo$$

quindi sarà pure

$$c'F\times Eo = c'O'\times Eo$$

ossia

$$c'F = c'O'$$

Vale a dire $c'F$, altezza del triangolo rettangolo $Ec'o$, l' è quanto il raggio del cerchio (c'). E da ciò si ricava il seguente

Teorema 29.

Se due cerchi sien tali che i quadrilateri iscritti in uno risultino circoscritti all' altro, il raggio del secondo sarà quanto l' altezza del triangolo rettangolo, che ha per cateti le due parti nelle quali il diametro del primo rimane diviso dal centro del secondo.

PROBLEMA XI.

§. 66. *Un triangolo variabile $RR'R''$ sia con tal legge iscritto in una curva conica (C) che due de' suoi lati RR'', $R'R''$ sieno continuamente tangenti ad un'altra data curva conica (C'); si cerca 1°. il luogo del punto U concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero RR'; 2°. la curva toccata dal lato medesimo.*

Sol. Fissato un sistema di assi come al §. 59, le equazioni delle due curve saranno come allora

$$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad (C)$$

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Cy + Dx^2 + 2Ex + F = o \qquad (C')$$

e le equazioni de' due lati RR'', $R'R''$ assoggettati a toccar (C') saranno come le (7)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} A'(r+r'')^2 + B'(rr''+m)^2 + 4nC'(r+r'') + 4nD'(rr''+m) \\ +2E'(r+r'')(rr''+m) + 4n^2F' \end{array}\right\} = o \\ \left.\begin{array}{r} A'(r'+r'')^2 + B'(r'r''+m)^2 + 4nC'(r'+r'') + 4nD'(r'r''+m) \\ +2E'(r'+r'')(r'r''+m) + 4n^2F' \end{array}\right\} = o \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Inoltre chiamando t, u le coordinate del punto U, l' equazione del lato libero RR', polare di U, sarà

$$yu = x(tm + n) + tn \qquad (29)$$

Ciò posto eliminando r'' tra le due equazioni (28) verrà a rilevarsi un' equazione nelle sole r, r'; restituendo poscia nell' equazione risultante i loro valori ad r, r', cioè

$$r = \frac{v}{z} \quad , \quad r' = \frac{v'}{z'}$$

si avrebbe un' altra equazione composta delle z, z', v, v';

in luogo delle quali finalmente rimpiazzando le espressioni del §. 18. perchè identicamente si dedurrebbero dalla (29), si avrà l' equazione nelle sole t, u, che sarà quella del luogo geometrico cercato. Siffatto procedimento condurrà ad una equazione di secondo grado tra t, ed u, come può verificarsi; e quindi la locale corrispondente sarà una sezione conica. Or noi eseguiremo questo calcolo, ma per brevità lo limiteremo al caso di due cerchi; le equazioai de' quali essendo

$$y^2 = 2nx - x^2 \qquad (c)$$

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - n'^2 = o \qquad (c')$$

le (28), e (29) pe' valori (11) diverranno respettivamente

$$\left.\begin{array}{l} n'^2(r + r'')^2 + (n'^2 - a^2)\ (rr'' - 1)^2 - 4na(rr'' - 1) - 4n^2 = o \\ n'^2(r' + r'')^2 + (n'^2 - a^2)\ (r'r'' - 1)^2 - 4na(r'r'' - 1) - 4n^2 = o \end{array}\right\} (30)$$

$$yu = x\,(n - t) + tn \qquad (31)$$

Intanto invece di eseguire la eliminazione di r'' tra le due equazioni (30), sarà meglio svilupparle, e sostituirvi dapprima i valori di r, r'. Dopo di che quelle equazioni ridotte, ed ordinate diverranno

$$v\,v''(2na - a^2) - z''\Big(z\,(2na - a^2 - 2n^2) + na^2\Big) - na^2 z - 2n^2(n'^2 - a^2) = o$$

$$v'v''(2na - a^2) - z''\Big(z'(2na - a^2 - 2n^2) + na^2\Big) - na^2 z' - 2n^2(n'^2 - a^2) = o$$

E ricavandone i valori di z'', e v'' si troverà

$$z'' = \frac{2n^2(n'^2 - a^2)\ (v - v') - na^2(zv' - z'v)}{(2na - a^2 - 2n^2)\ (zv' - z'v) - na^2(v - v')}$$

$$v'' = \frac{n^2(z - z')}{(2na - a^2)} \times \frac{(2na - a^2)^2 + 2n'^2(2na - a^2) - 4^2 n'^2}{(2na - a^2 - 2n^2)\,(zv' - z'v) - na^2(v - v')}$$

Attualmente si sostituiscano in queste espressioni a z, z', v, v'

i loro valori dedotti dalla (31) come fu fatto al §.18, e si avrà

$$z'' = \frac{2(n'^2 - a^2)(n - t) - a^2 t}{2t(a - n) - a^2}$$

$$v'' = u\,\frac{(2na - a^2)^2 + 2n'^2(2na - a^2) - 4n^2n'^2}{(2na - a^2)\left(2t(a - n) - a^2\right)}$$

E poichè dev' essere in virtù di (c)

$$v''^2 = z''(2n - z'')$$

sostituendo quivi in luogo di v'', z'' le espressioni precedenti, la risultante equazione in t, u sarà quella del luogo geometrico cercato. Eseguendo la sostituzione si troverà

$$\left.\begin{array}{l} u^2\,\dfrac{\left((2na - a^2)^2 + 2n'^2(2na - a^2) - 4n^2n'^2\right)^2}{(2na - a^2)^2} + \\ t^2\left((2na-a^2)^2+4n'^2(2na-a^2)-8n^2n'^2+4n'^4\right) - \\ 2tn\left((2na-a^2)+2n'^2(2na-a^2)-4n^2n'^2-2n'^2a^2+4n'^4\right) + \\ \qquad 4n^2n'^2(n'^2 - a^2) \end{array}\right\} = 0 \quad (D)$$

Equazione ad una curva conica (*). Se il calcolo medesimo si fosse proseguito sulle equazioni (30), e (31) che riguardano il caso di due curve coniche qualunque, altra varietà non si sarebbe incontrata, che espressioni più complesse; ma l' equa-

---

(*) Essendo sempre positivo il coefficiente u^2, perchè quadrato, l' equazione (D) esprimerà l' ellisse, l' iperbole, o la parabola, secondochè il coefficiente di t^2 sia positivo, negativo, o zero. Discuteremo più innanzi come, e quando hanno luogo queste tre diverse posizioni; ma si osservi da ora che il cofficiente di t^2 può mettersi sotto quest' altra forma

$$(a^2 - 2n'^2)\left((2n - a)^2 - 2n'^2\right)$$

zione risultante sarebbe sempre di secondo grado ; potendo però , a misura della disposizion de' dati , contenere o entrambi i termini in ut , ed u , o l'un de' due . Per tanto si ha in generale

TEOREMA 30.

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica (C) sieno assoggettati ad essere continuamente tangenti ad un' altra curva conica (C') , il luogo del punto di concorso delle tangenti nelle estremità del lato libero sarà una terza curva conica (D) .

§. 67. E dalla teorica delle polari reciproche si avrà inoltre

TEOREMA 31.

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in una curva conica (C) sieno assoggettati ad essere continuamente tangenti ad un' altra sezione conica (C'), il lato libero sarà anch' esso continuamente tangente ad una terza curva conica (D') .

§.68. E questa ultima curva (D') dovrà , com' è chiaro , ridursi alla curva data (C') , se mai si verifichi tra' determinanti di (C) , e (C') la relazione (9) nel §. 60.

§.69. Le due locali (D) , (D') son tra loro polari reciproche in rapporto alla sezione conica (C), che quì assumesi come direttrice de' poli ; e l' equazione della (D') può in conseguenza agevolmente dedursi da quella di (D) per mezzo della

formola generale, che abbiamo esibita nella enunciata teorica delle polari coniche reciproche (*). Esamineremo queste due locali pel caso che le curve date sien due cerchi, dinotandole per chiarezza con (D), (D′). Scriviamo adunque la (D) compendiatamente a questo modo (**)

$$u^2 \frac{A''}{(2na-a^2)^2} + t^2 D'' - 2tn E'' + n^2 F'' = o$$

l' equazione della sua polare reciproca sarà, divisa per n^2

$$\left.\begin{array}{l} y^2(E''^2 - F''D'') - x^2(D'' + 2E'' + F'')\dfrac{A''}{(2na-a^2)^2} + \\ 2tn\,(E'' + F'')\,\dfrac{A''}{(2na-a^2)^2} - n^2F''\dfrac{A''}{(2na-a^2)^2} \end{array}\right\} \quad (32)$$

(*) In questa teorica abbiamo mostrato che se son date due curve dalle equazioni

$$y^2 = mx^2 + 2nx \qquad (C)$$

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Cy + Dx^2 + 2Ex + F = o \qquad (C')$$

la polare reciproca di (C′), relativamente a (C), assunta come direttrice de' poli, avrà per equazione

$$\left.\begin{array}{l} u^2(E^2-FD) + 2u\Big((tm+n)(CE-BF) + tn(BE-DC)\Big) + \\ t^2n^2(B^2-AD) + (tm+n)^2(C^2-AF) + 2tn(tm+n)(AE-BC) \end{array}\right\} = o$$

(**) Cioè ponendo per brevità

$$A'' = \Big((2na-a^2)^2 + 2n'^2(2na-a^2) - 4n^2n'^2\Big)$$

$$D'' = (2na-a^2)^2 + 4n'^2(2na-a^2) - 8n^2n'^2 + 4n'^4$$

$$E'' = -\Big((2na-a^2)^2 + 2n'^2(2na-a^2) - 4n^2n'^2 - 2n'^2a^2 + 4n'^4\Big)$$

$$F'' = 4n'^2(n'^2 - a^2)$$

e restituendo ad A'', D'', E'', F'' i loro valori, quest' ultima equazione, dopo i necessarii sviluppi, e contrazioni, si ridurrà ad (*)

$$y^2+x^2-2xn\,\frac{(2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2}{(2na-a^2)^2}=\frac{4n^2n'^2(n'^2-a^2)}{(2na-a^2)^2} \qquad (\text{D}')$$

equazione ad un cerchio, il di cui centro, come vedesi, è sull' asse delle x, cioè in linea retta co' centri de' due cerchi dati. E si ha il seguente

TEOREMA 32.

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in un cerchio (c) tocchino continuamente un altro cerchio (c'), il lato libero sarà anch' esso continuamente tangente ad un terzo cerchio (D').

§. 70. Vediamo intanto qual sia la posizione di questo terzo cerchio, cioè della locale (D'), rispetto ai due da' quali trae origine, e quali altri rapporti si passino tra di loro.

(*) Nell' eseguire la sostituzione si troverà che il coefficiente di y^2, cioè $(E''^2-F''D'')$, si riduce ad A''; quindi tutta l' equazione (32) sarà divisibile per A'', e diverrà

$$y^2-x^2\frac{D''+2E''+F''}{(2na-a^2)^2}+2xn\frac{E''+F''}{(2na-a^2)^2}-\frac{a^2F''}{(2na-a^2)^2}=0$$

Inoltre si vedranno risultare

$$D''+2E''+F''=-(2na-a)^2$$

$$E''+F''=-\left((2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2\right)$$

e quindi l' equazione (32) si trasforma in (D').

E pria di ogni altro esamineremo se s' incontrano, ed in quai punti. A tal' uopo combiniamo l' equazione del cerchio locale (D′) coll' equazione di uno de' due cerchi dati, per esempio con

$$y^2 + x^2 - 2nx = o \qquad (c)$$

e sottraendo l' una dall' altra, tolto il fattor comune $\frac{4n^2n'^2}{(2na - a^2)^2}$ si avrà immantinenti

$$2x(n - a) = n'^2 - a^2$$

donde

$$x = \frac{n'^2 - a^2}{2(n - a)} \qquad (33)$$

dal che si vede che i due cerchi (c), (D′) debbono incontrarsi ne' punti, che vengono determinati sopra di essi dalla retta (33), la quale esprime una parallela all' asse delle y, ed è perciò perpendicolare alla congiungente de' centri; val quanto dire la (33) non è che l' equazione della corda comune a' due cerchi. Ma combinando nel modo istesso tra loro le equazioni de' due cerchi dati

$$y^2 + x^2 - 2nx = o \qquad (c)$$
$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - n'^2 = o \qquad (c')$$

si trova egualmente

$$x = \frac{n'^2 - a^2}{2(n - a)}$$

dunque i punti d' incontro di (D′), e (c) debbono essere gli stessi di quelli, in cui s' incontrano (c), e (c′). In conseguenza *i due cerchi dati incontreranno il cerchio locale se s' incontrano tra loro; e non lo incontreranno affatto se essi nep-*

pur s' incontrano (*). *E nel caso d' incontro i tre cerchi* (c), (c'), (D') *passeranno tutti pe' due medesimi punti, avendo una corda comune.*

(*) Poichè l' equazione $x=\frac{n'^2-a^2}{2(n-a)}$ esprime l' equazione della corda comune a' due cerchi dati (c), (c'), pare, contro al fatto, che dovesse necessariamente risultarne l' incontro loro; dapoichè la quantità $\frac{n'^2-a^2}{2(n-a)}$ è sempre una quantità reale. Ma un risultamento di tal natura altro non indica se non che la retta $x=\frac{n'^2-a^2}{2(n-a)}$ debba, rispetto a due cerchi, che non s' intersecano, godere delle stesse proprietà di cui gode la corda comune di due cerchi, che s' intersecano, *indipendentemente dai punti d' intersezioni*. Così per esempio si sa che la corda comune di due cerchi, che s' intersecano è il luogo de' punti da cui condotte le tangenti a' cerchi medesimi, queste risultano tra loro eguali: la proprietà medesima dovrà dunque competere, relativamente a due cerchi, che non s' intersecano, alla retta dinotata dall' equazione $x=\frac{n'^2-a^2}{2(n-a)}$

Ed in fatti, se dati i due cerchi (c), (c') voglia rinvenirsi una tal locale, chiamando z, v le coordinate di uno de' suoi punti, si ha

$$\sqrt{\left(v^2+(z-n)^2-n^2\right)}=\sqrt{\left(v^2+(z-a)^2-n'^2\right)}$$

donde

$$(z-n)^2-(z-a)^2=n^2-n'^2 \qquad (a)$$

ed in fine

$$z=\frac{n'^2-a^2}{2(n-a)}$$

ch' è l' equazione della locale cercata, identica a quella della corda comune. Parimente si sa che la corda comune di due cerchi divide la distanza de' centri per modo che la differenza de' quadrati delle due parti è quanto la differenza de' quadrati de' due raggi; la proprietà medesima si legge nella equazione (a) per due cerchi comunque situati. Ecco

§.71. Proponghiamoci in secondo luogo a determinare il centro del cerchio locale, e 'l suo raggio onde possa descriversi; ma a tal' effetto porremo sotto una forma più vantaggiosa la sua equazione

$$y^2+x^2-2xn\frac{(2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2}{(2na-a^2)^2}=4n^2n'^2\,\frac{n'^2-a^2}{(2na-a^2)^2}\quad(D')$$

la quale, con aggiungere a' due membri il quadrato della metà del coefficiente del termine in x a primo grado, diviene

$$\left.\begin{array}{l} y^2+\left(x-n\dfrac{(2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2}{(2na-a^2)^2}\right)^2= \\ n^2\left(\dfrac{(2na-a^2)^2+2n'^2(2na-a^2)-4n^2n'^2}{(2na-a^2)}\right)^2 \end{array}\right\}\quad(34)$$

ed or si vede che il raggio del cerchio locale sia dinotato da

$$\pm\, n\,\frac{(2na-a^2)^2+2n'^2(2na-a^2)-4n^2n'^2}{(2na-a^2)^2}$$

laonde l' ascissa del suo centro essendo

$$n\,\frac{(2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2}{(2na-a^2)^2};$$

le due distanze da' vertici di quel suo diametro, che si distende sull' asse delle x, all' origine delle ascisse, saranno rappresentate dalla formola

$$n\frac{(2na-a^2)^2-4n^2n'^2+4nan'^2}{(2na-a^2)^2}\pm n\,\frac{(2na-a^2)^2+2n'^2(2na-a^2)-4n^2n'^2}{(2na-a^2)^2}$$

Dinotando adunque queste due distanze con x', x'', respettiva-

---

adunque, senza snaturare le nozioni di corde comuni, e di intersezioni, spiegato convenientemente un fatto analitico, che da principio appariva contraddittorio.

mente, si avrà dopo le riduzioni nascenti dal duplice segno,

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2n\frac{a^2-n'^2}{a^2} \\ x'' &= \frac{2nn'^2}{(2n-a)^2} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Costruiti questi due valori rimarranno con essi assegnati i determinanti del cerchio locale. Per tanto la costruzione di questi due valori è bene agevole dapoichè riflettendo che le PP′, pp′, polari de' punti O, o, cioè de' punti (o, o), (2n, o), tagliano sull' asse delle ascisse, vale a dire sul diametro Oo, due rette espresse respettivamente da (**) *fig. 45.*

(*) Ben si comprende che questi due valori altro non sono, che le radici, ossia i due valori di x nell' equazione, che risulta da (D′) fattovi $y = o$; mentre in questo caso esse due radici dinotano appunto le ascisse da entrambi i vertici del cerchio locale. Questi valori avrebbero potuto dedursi immantinenti, e con maggior eleganza da quell' equazione, osservando che il secondo membro côl segno cambiato si scinde a prima vista ne' due fattori

$$\frac{2nn'^2}{(2n-a)^2}\,,\; 2n\,\frac{a^2-n'^2}{a^2}$$

la di cui somma compone evidentemente il coefficiente del secondo termine col segno contrario; cosicchè questi due fattori ne dovranno essere le radici; ma più diretto, e più conforme allo spirito del metodo analitico è il procedimento quassù tenuto, il quale, come ha potuto osservarsi, equivale alla risoluzione dell' equazione di secondo grado in x.

(**) Se da un punto (x',y') preso sul piano di una curva di 2. ordine data dall' equazione

$$Ay^2 + 2Bxy + 2Cy + Dx^2 + 2Ex + F = o \qquad (C')$$

si conducano alla stessa le due tangenti, la retta tra i contatti, ossia la polare di quel punto, ha per equazione, com' è noto

$$x = \frac{a^2 - n'^2}{a} = \mathrm{OP} \qquad (35)$$

$$x = a + \frac{n'^2}{2n - a} = \mathrm{O}p \quad , \quad \text{ed} \quad x - a = \frac{n'^2}{2n - a} = c'p \quad (36)$$

si vedrà che sia

$$2n\frac{a^2 - n'^2}{a^2} = \frac{2n \times \mathrm{OP}}{a} = \frac{\mathrm{O}o \times \mathrm{OP}}{\mathrm{O}c'} = x'$$

$$\frac{2nn'^2}{(2n - a)^2} = \frac{2n \times c'p}{2n - a} = \frac{\mathrm{O}o \times c'p}{oc'} = x''$$

Laonde, tagliata OD quarta proporzionale dopo $\mathrm{O}c'$, OP, ed $\mathrm{O}o$; ed $\mathrm{O}d$ quarta dopo oc', $c'p$, ed $\mathrm{O}o$, risulterà

$$x' = \mathrm{OD}$$
$$x'' = \mathrm{O}d$$

e 'l cerchio descritto intorno al diametro Dd sarà la locale richiesta.

$$Ayy' + B(xy' + x'y) + C(y + y') + Dxx' + E(x + x') + F = o$$

Quindi, se la curva (C') si riduca ad

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - n'^2 = o$$

l' equazione della polare si ridurrà ad

$$yy' + xx' - a(x + x') + a^2 - n'^2 = o$$

Poichè dunque il punto O è lo stesso che (o, o), cioè l' origine delle coordinate, così la sua polare sarà

$$- ax + a^2 - n'^2 = o$$

donde si ricava

$$x = \frac{a^2 - n'^2}{a}$$

In simil guisa si troverà che il punto o essendo espresso da $(2n, o)$, abbia per polare la retta data dall' equazione

$$2nx - a(x + 2n) + a^2 - n'^2 = o$$

donde

Or si congiunga OP′, che toccherà il cerchio (c') in P′; e prodotta in S, si uniscano le So, SD, e si tiri il raggio c'P′; sarà questo raggio parallelo ad So. Quindi essendo Oc' : OP :: Oo : OD, risulterà SD parallela a PP′, ossia perpendicolare ad Oo. In simil guisa, segnata la tangente $op's$, si vedrà risultare sd perpendicolare ad Oo. E dopo ciò si ha la seguente

Composizione.

Condotto pe' centri de' due cerchi dati il diametro Oo, si tirino nel cerchio (c) le due corde OS, os tangenti al cerchio (c'); e dalle loro estremità si abbassino su di Oo le perpendicolari SD, sd. Il cerchio descritto intorno al diametro dD, sarà la locale cercata. *f. 45, 46.*

§.72. La presente composizione regge sia che il cerchio (c') si trovi al di dentro del cerchio (c), sia che si trovi al di fuori di esso (fig. 46); ma cadrebbe in difetto, o almeno esigerebbe di essere modificata, nel caso che i due cerchi s' intersecassero, come nella figura 47; dappoichè non potrebbero da entrambi i punti O, o condursi le tangenti al cerchio (c'). Però in questo caso la composizione riesce anzi più agevole, rammentando, che il cerchio locale passa anch' esso pe' due punti ne' quali s' intersecano i due cerchi dati (§. 70.). Quindi condotta a (c') la sola tangente osP′, ed sd perpen-

---

$$x(2n-a) = a(2n-a) + n'^2$$

ed

$$x = a + \frac{n'^2}{2n-a}$$

dicolare ad Oo, il cerchio locale passerà pe' tre punti E, E', d; e ciò basta a poterlo descrivere.

fig. 48. §.73. Nel caso che i cerchi s' intersecano può avvenire che la sd si distenda sulla corda comune EE'; il che ha luogo, com' è chiaro, se il centro di (c') si confonda col punto O; in questo caso il cerchio locale dovendo passare pe' tre punti E, d, E' situati in linea retta, diventa di curvatura infinita; e perciò dovendo i lati liberi de' triangoli variabili iscritti in (c) toccarlo a distanza infinita, saranno paralleli ad EE', e quindi perpendicolari ad Oo; donde specialmente ricavasi il seguente

Teorema 33.

Se due lati di un triangolo variabile iscritto in un cerchio tocchino continuamente un altro cerchio il di cui centro stia sulla circonferenza del primo, il lato libero sarà costantemente perpendicolare alla congiungente de' loro centri.

Qual teorema ricavasi dall' equazione della locale (D') col supporvi $a = o$.

§.74. Se avvenga che tra i determinanti de' due cerchi dati si verifichi la relazione (13) trovata nel §.61, cioè

$$a(2n - a) = 2nn'$$

ovvero

$$(2na - a^2)^2 = 4n^2n'^2$$

in virtù di questa relazione l' equazione (34) appartenente al cerchio locale si ridurrà ad

$$y^2 + (x - a)^2 = n'^2$$

ch' esprime lo stesso cerchio dato (c'), com' esser dovea per ciò che si è detto nel §. 68.

§. 75. Suppongasi ancora, che tra i determinanti de' cerchi dati si verifichi l' altra relazione (27) trovata al §. 65. nel risolvere il problema X., cioè

$$(2na - a^2)^2 = - 2n'^2 (2na - a^2) + 4n^2n'^2$$

questa relazione ridurrà l' equazione (34) ad

$$y^2 + \left(x - \frac{2nn'^2}{(2n - a)^2}\right)^2 = o$$

la quale, come ben si comprende, non può dare per y ed x altri valori, che $y = o$

$$x = \frac{2nn'^2}{(2n - a)^2}$$

e quindi esprime un punto sulla congiungente i centri, determinato dall' ascissa $\frac{2nn'^2}{(2n - a)^2}$; vale a dire in questo caso la locale finisce di essere una curva, e si riduce ad un punto.

E perciò

Teorema 34.

Se sien dati due cerchi tali, che possano iscriversi in uno quadrilateri che sieno circoscritti all' altro; il lato libero di qualunque triangolo iscritto nel primo, con due lati tangenti l' altro, passerà costantemente per un medesimo punto.

Dal che poi si deduce l' altro

TEOREMA 35.

Le diagonali di tutt' i quadrilateri iscrittibili, e circoscrittibili nel tempo stesso a due cerchi dati s' intersecano in un medesimo punto.

§. 76. Discussa l' equazione (D') appartenente alla curva cui sono continuamente tangenti i lati liberi de' triangoli variabili iscritti nel cerchio (c) con due lati tangenti il cerchio (c'), rimane ad esaminarsi la (D), che rappresenta il luogo geometrico de' punti di concorso delle tangenti nelle estremità di que' lati liberi. Ma poichè nella più volte ripetuta teorica delle polari reciproche abbiamo mostrato come dedurre tutte le affezioni dell'una da quelle dell' altra, e viceversa, possiamo attualmente dispensarci da quest' altro assunto, mentre le due curve (D), (D') trovansi appunto in questo caso; e quindi sarebbe superflua ogni ulteriore discussione. Uopo è però, che si conosca quale delle curve coniche esprime precisamente la (D); ed a tal effetto rammenteremo ciò, che si è detto nella nota a p.102; val quanto dire, che la sezione conica rappresentata dalla (D) potrà essere *ellisse*, *iperbole*, o *parabola*, secondochè il coefficiente di t^2 sia *positivo*, *negativo*, o *zero*. E poichè si fece osservare in quella nota, che questo coefficiente potea mettersi sotto la forma

$$(a^2 - 2n'^2)\left((2n - a)^2 - 2n'^2\right) \qquad (37)$$

si rileva: 1°, ch' esso sarà positivo se i due fattori, che lo compongono sieno positivi entrambi, o entrambi negativi: 2°, che sarà negativo se le quantità, che compongono i due

fattori risultino di segni contrarj : 3°, e finalmente che questo coefficiente sarà zero quantevolte o l' uno o l' altro de' due fattori risultasse zero . Vediamo intanto quale esser dee la disposizion de' dati, perchè abbian luogo questi tre diversi casi . Ed in primo luogo, per l' espressione (37) positiva, è necessario che si abbia

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{2} > n'^2 \\ \dfrac{(2n-a)^2}{2} > n''^2 \end{array}\right. \quad \text{Oppure} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{2} < n'^2 \\ \dfrac{(2n-a)^2}{2} < n''^2 \end{array}\right.$$

ma rilevasi dalle espressioni (35) e (36) respettivamente

$$n'^2 = a(\,a \;-\mathrm{OP}\,) = a.\overline{c'\mathrm{P}}$$
$$n''^2 = \;(\,2n - \;a\,)\,\overline{c'p}$$

quindi le precedenti relazioni si ridurranno ad

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} > \overline{c'\mathrm{P}} \\ \dfrac{2n-a}{2} > \overline{c'p} \end{array}\right. \quad \text{Ed} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{2} < \overline{c'\mathrm{P}} \\ \dfrac{2n-a}{2} < \overline{c'p} \end{array}\right.$$

Ovvero a

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{c'\mathrm{I}} > \overline{c'\mathrm{P}} \\ \overline{c'i} > \overline{c'p} \end{array}\right. \quad \text{Ed} \quad \left\{\begin{array}{l} \overline{c'\mathrm{I}} < \overline{c'\mathrm{P}} \\ \overline{c'i} < \overline{c'p} \end{array}\right.$$

bisecando $\overline{c'\mathrm{O}}$ in I , e $\overline{c'o}$ in i . Dunque l' espressione (37) , coefficiente di t^2 nell' equazione (D), sarà positiva se i punti P, p , poli conjugati di O , o , si rattrovino o entrambi tra i punti I , i , o entrambi al di là di essi . E però , quando ciò sia , la sezione conica (D) sarà ellisse .

In secondo luogo, per l' espressione (37) negativa, si troverà collo stesso procedimento, che debba essere

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{c'I} > \overline{c'P} \\ \overline{c'i} < \overline{c'p} \end{array} \right. \quad \text{Oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{c'I} < \overline{c'P} \\ \overline{c'i} > \overline{c'p} \end{array} \right.$$

fig. 49. Laonde la sezione conica (D) sarà iperbole, se un de' punti P, p si trovi tra i punti I, i, l' altro al di là di essi.

Finalmente perchè l' espressione (37) possa divenir zero, si troverà che debba reggere o l' una, o l' altra delle condizioni

$$\overline{c'I} = c'P \text{ , ovvero } \overline{c'i} = c'p$$

E perciò la sezione conica (D) sarà parabola se il punto P cada sul punto I, oppure il punto p cada sul punto i. *fig. 50.*

§.77. Il problema di cui ci siamo occupati par che nulla di più lasci a desiderare, pel caso che le due curve date sieno cerchi, essendosi compiutamente discussi i risultamenti analitici che si ottengono per questo caso. Ma sulle tracce stesse sarebbe egualmente agevole praticare altrettanto per l' equazione, che si ha pel caso di due curve coniche qualunque, a fin di rilevarne gli analoghi teoremi; e questo assunto, al quale la brevità non ci permette innoltrarci, potrebbe formare un esercizio utilissimo pe' giovani analisti; come del pari utile sarebbe impiegarvi il metodo delle projezioni. Noi pertanto ci riserbiamo ritornare su tale argomento, non solo per generalizzarlo a' poligoni iscritti, e circoscritti con varie condizioni tra un numero qualunque di curve algebriche, ma anche per esporre talune importanti ricerche sulla teorica dell' eliminazione, alle quali ci ha condotti appunto questo problema geometrico.

Fig. 7.
B
A B''
B'
m
q
p
r
C
n
Fig. 8.
B
D
B''
D'
B'
p
m
q
r
n
U
B
B'
Y
O
V
P
V'
Fig. 9.
U''
V''
X
U'
Fig. 10.
B
B'
Q
U
Y
O
V'
V
V'''
V''
X
Fig. 11.
T
U
B
A
D
B'
Y
V
O
V''
V'
V''
X

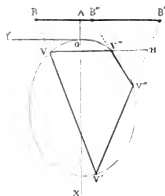
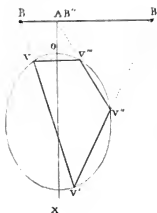
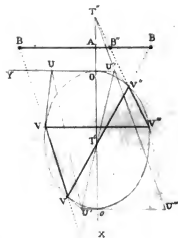
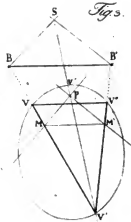
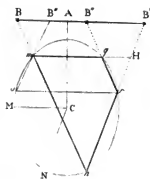
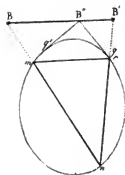
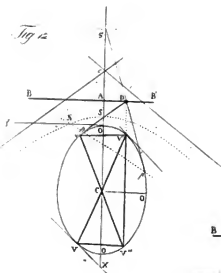
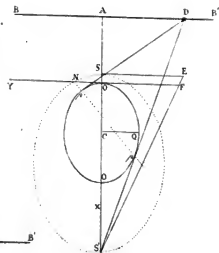
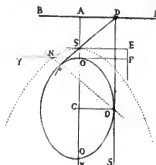
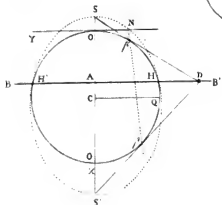
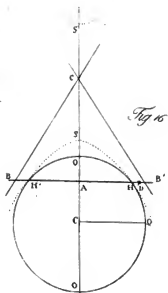
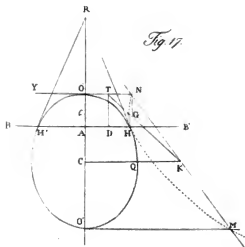
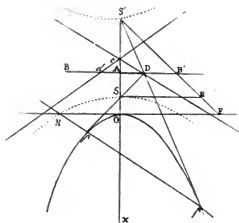
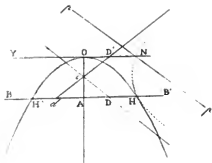
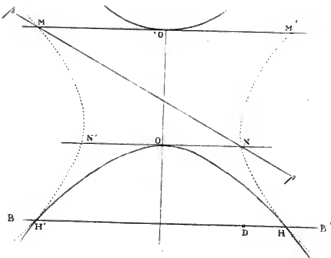
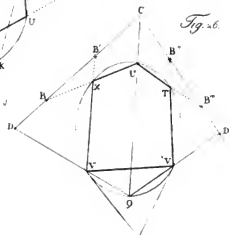
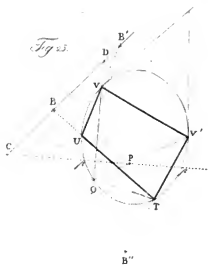
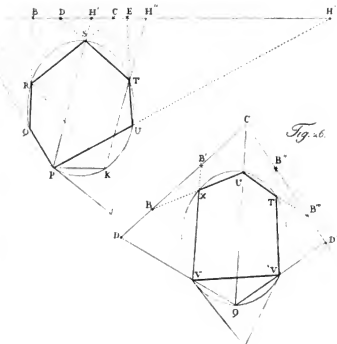
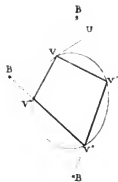
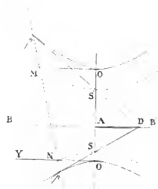
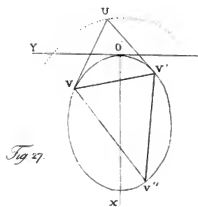
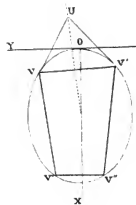
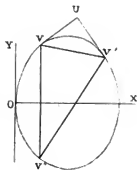
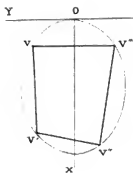
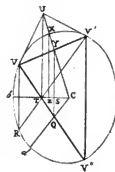



Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16

Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

U
Y
O
V
V'
V''
X
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29
Fig. 30.
Fig. 31.

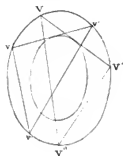
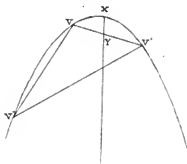



Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

Fig. 38
R
C
C'
R''
R'
Fig. 39
R
C'
C
R''
R'
Fig. 40
R
R'
O
O'
c' c
o
R''
Fig. 41
R
c'
O'
c
R''
R'
Fig. 42
R
R'
O
O'
c
o
R''
F
E
R''
Fig. 43
R
c'
O'
O
R''
c
o
R'
R''
F
E